دكتور

أحمد أنور أبو النور

المنطق الطبيعي

دراسة في نظرية الاستنباط الأساسية

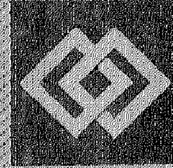
$\{(P \rightarrow Q) \rightarrow P\} \rightarrow P$

$\{(P \rightarrow Q) \rightarrow P\} \rightarrow P$

$\{(P \rightarrow Q) \rightarrow P\} \rightarrow P$

$\{(P \rightarrow Q) \rightarrow P\} \rightarrow P$

$\{(P \rightarrow Q) \rightarrow P\} \rightarrow P$



دار الثقافة للنشر والتوزيع بالقاهرة

المنطق الطبيعى

دراسة فى نظرية الإستنباط الأساسية

دكتور
أحمد أنور أبوالنور

المنطق الطبيعى

دراسة في نظرية الاستنباط الأساسية

دار الثقافة للنشر والتوزيع بالقاهرة

الطبعة الأولى

١٩٩٣

رقم الايداع بدار الكتب ١١٣٤٩ / ١٩٩٣

دار الثقافة للنشر والتوزيع بالقاهرة

٢ ش سيف الدين المهرانى - الفجالة

الإهداء

إلـــــى رضـــــوى

إلـــــى رائـــــف

أنتما وجيلكما الغامض،

تشهدون ميلاد قرن جديد،

فهل تركنا لكم قبساً تهتدون به؟

أحمـــــد أنـــــور

المحتويات

المقدمة

المقـــدمـــة

١ - المنطق والفكر والعالم

يمكن النظر إلى الفلسفة باعتبارها محاولة لتحديد العلاقة بين رؤوس مثلث الفكر واللغة والوجود. يطغى أحدها فى حقبة تاريخية معينة، ويصبح هو نفسه، أو علاقاته بالعناصر الأخرى موضوع أو موضوعات الفلسفة الرئيسية فى تلك الحقبة . وفى هذا الإطار نجد أن مبحث الوجود أو العالم كان محور الفلسفة فى العصور القديمة، وكان الفكر محور الفلسفة الحديثة، واللغة محور الفلسفة المعاصرة . وبرغم أن مفكرى كل عصر من العصور المشار إليها يركزون على طرف معين أو حتى على علاقة بين رأسين لا يختفى الطرفان الآخران كلية.

وكان موقع المنطق بالنسبة للفلسفة موضع خلاف بين الإتجاهات الفكرية دائماً. فى البداية كان الخلاف الشهير بين أرسطو والرواقيين حول العلاقة بين المنطق والفلسفة. ذهب أرسطو ومدرسته إلى أن المنطق ليس جزءاً من الفلسفة،أى أنه نسق نظرى أو آلة، منفصلة عن الفلسفة وإن كان مقدمة هامة لها، وهذا ما مارسه فى كتاباته الموسوعية المعروفة . أما الرواقيون فقد أكدوا أن المنطق جزء أصيل من الفلسفة، وليس مجرد مقدمة لها كما ذهب إلى ذلك أرسطو . غير أننا لا نريد المبالغة فى أهمية هذا الخلاف ، كما أشار بذلك نيل (١)، فالخلاف لفظى هامشى ، والثابت أن

---

(1) Kneale, W. & Kneale, M. (1962), p. 737.

المنطق متداخل بصورة لافكاك منها مع كل مباحث الفلسفة بلا استثناء ، وقد ظهر هذا جلياً فى النسقين الفكريين المشائى والرواقى فى آن واحد .

والمتفحص لكتابات أرسطو المنطقية، والتى سيطرت على المسرح الفكرى حتى بدايات العصور الحديثة ، يجد أنه يستوى لدى أرسطو أن يكون موضوع المنطق المباشر هو الفكر أو اللغة أو العالم .(١) صحيح أن مناطقة العصور الوسطى ركزوا على ارتباط المنطق بالفكر من حيث اعتباره آلة تعصم الذهن من الوقوع فى الخطأ. وهم فى هذه الحالة لم يخرجوا عن أرسطو على الإجمال، فضلاً عن أنهم لم يتوانوا عن استخدام النظرية القياسية ولواحقها فى الموضوعات اللاهوتية أو الفقهية أو اللغوية ولكن هذا ليس ما أجمع عليه المناطقة فى كل العصور.

فإذا قفزنا من عصر أرسطو إلى النصف الثانى من القرن العشرين، نجد أنه لا يعد من قبيل المبالغة إطلاقاً قولنا إن المشروع المعاصر لبناء نظرية جبارة تتمحور حول إنجازات المنطق الحديث، وهى ما يعرف فى الأدبيات الحديثة بمبحث المنطق الفلسفى ، ويسمى أحيانا فلسفة اللغة هو الشغل الشاغل لعدد كبير من مراكز البحث الفلسفى فى أرقى جامعات بريطانيا والولايات المتحدة واستراليا وغيرها من دول أوربا بدرجة أقل . ويمثل هذا المشروع أقوى المحاولات وأكثرها طموحاً لاستيعاب تراث الفلسفة ومشكلاتها تحت لواء المنطق نشوداً للدقة والصرامة الصورية المطلقة .

---

(1) Ibid, p.738

والسؤال الذى يفرض نفسه علينا فى السياق الحالى يتعلق بقوانين المنطق ومبرهناته. هل تعبر هذه القوانين عن سمات معينة للفكر الإنسانى ؟ أم أنها تصف ملامح محددة للعالم؟ وقد قلنا منذ سطور قليلة إن أرسطو لا يقدم لنا إجابة مباشرة عن هذا السؤال الهام . ومن ثم فعلينا أن ننظر بصورة سريعة إلى آراء اللاحقين بحثاً عن إجابة محددة . ونستبق القول لنعلن أن حسم المسألة بصورة نهائية يحتاج إلى التريث حتى ننتهى من دراسة النظرية المنطقية المعاصرة بكاملها، وهو بالطبع ما يخرج عن إطار هذا البحث. ولا يغنى الأمر قطعاً عن استكشاف مبدئى للآراء المطروحة ، وتقديم محاولة للإجابة فى حدود المجال الذى تغطيه الدراسة الحالية.

ولا شك أن هناك الكثير من تلاميذ أرسطو، والمناطقة الذين تلوه حتى فى العصور الحديثة، الذين ربطوا بين المنطق ونظرية المعرفة، وعلم نفس التفكير ، ونذكر هنا جون لوك مثلاً الذى أصر على الربط بين قوانين المنطق والفكر الإنسانى، وفعل ذلك غيره من المفكرين المحدثين . وقد بالغ جون لوك بالذات فى موقفه حين رفض أى دور تقويمى أو توجيهى للمنطق وكتب ساخراً من أرسطو حين قال إن الله لم يخلق البشر كائنات ذوات قدمين فقط، وترك لأرسطو مهمة جعلهم عقلاء .. لقد كان الله أكرم على البشر من هذا بكثير، فقد حباهم العقل الذى به يفكرون [١]ويستدلون، دون الإستناد إلى إرشادات المناهج الأرسطية القياسية.

لقد كان جون لوك هنا يؤسس لنزعة سيكولوجية فى المنطق تدعو إلى

---

(1) Locke,J. An Essay Concerning Human Understanding, p.419

اكتشاف أصول المنطق فى العمليات السيكولوجية المتقدمة ، وخاصة العمليات الإستدلالية التى يقوم بها العقل الإنسانى . ونعلم أن جون ستيوارت مل قد سار فى هذا الإتجاه، وطوره بشكل كبير، ونحن لسنا بصدد تقييم هذا الإتجاه الذى يتواكب مع فلسفة تجريبية تقليدية محددة المعالم، تفصل بشكل قاطع بين مجال العلوم الإمبريقية التى نستند فى المعرفة بموضوعاتها الى الخبرة الحسية والتجربة بشكل عام ، وبين العلوم الدقيقة، وبخاصة المنطق الذى نستخرج قوانينه من النفس الإنسانية. ومن ناحية أخرى نجد مناطقة أقرب فى إتجاهاتها الى أن يكونوا رياضيين، وهم فى الواقع المؤسسون الحقيقون للمنطق بالمعنى الحديث. نجد فى هذا الصدد الرياضى الإنجليزى الشهير جورج بول Boole الذى تخدعنا عناوين مؤلفاته الهامة حين يختار لأحدها عنواناً هو: «بحث فى قوانين الفكر» (١)، ولكن حقيقة الأمر أن جبر المنطق وهو الإسهام الذى ينسب فى أنضج صوره إلى جورج بول لاعلاقة له بالفكر من قريب أو بعيد، بمعنى أنه ليس استنباطاً تجريدياً من دراسة العمليات الفكرية ، أما التفسير المنطقى الصحيح لجبر المنطق فهو أنه مهتم بعلاقات بين كائنات ليست عقلية بالمرة(٢).

أما جوتلوب فريجه Frege ، الرياضى والمنطقى والفيلسوف الألمانى

---

(١) العنوان الدقيق لكتاب جورج بول الهام هو :

An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities"

(2) Kneale,W.& M.(1962), p.738.

الكبير، فيفصل بوضوح وصراحة بين السيكولوجيا والمنطق . ويرفع فريجه الشعار الشهير القائل بأن المنطق هو علم قوانين قوانين الطبيعة، وتكرار كلمة قوانين فى العبارة السابقة ليس خطأ مطبعياً على الإطلاق . إن مهمة العلم هى دراسة قوانين الطبيعة ، أما مهمة المنطق فهى اكتشاف القوانين التى تحكم قوانين الطبيعة . وهذا يعتبر من أفضل التعريفات الحديثة للمنطق حتى الآن.إن فريجه ومن قبله جورج بول، ومن قبلهما ليبنتزLeibniz يقدمون المنطق كنسق من المبادئ التى تسمح بالاستدلال الصحيح فى كل الموضوعات .. هذاهو محور المنطق ، وأى مسألة أخرى يرتبط وجودها بصلتها بهذا الهدف الرئيسى.

نحن، إذن أمام تيارين متعارضين، ومختلفين بشدة حول طبيعة المنطق. هناك مؤيدون للتيار السيكولوجى، وهناك مؤيدون للتيار الذى نسميه بالواقعى . ولن يكون فى مستطاعنا حسم الأمر بينهما إلا بعد استيفاء النظرية المنطقية حقها من الدراسة ، وهو أمر نرجو أن نوفق فيه لاحقاً، لا كفرد واحد، بل بجهود مجموعة من الباحثين عليها أن تحاول خلق تيار من دارسى المنطق المعاصر الذى تتسارع جهود الباحثين فى العالم نحو تحقيق نتائج جديدة فيه كل يوم . . وهذا أمر يحتاج منا إلى المتابعة والمشاركة الفعالة فيه دون انتظار.

ولا نريد الاستطراد فى هذا الهم الذى يجب أن يشغلنا على أى حال، ولكن يجب أن يكون عملنا مرتبطاً برصد تطورين معينين ينبهنا إليهما وليم ومارتا نيل فى كتابهما الرئيسى فى تاريخ المنطق(١) . أما التطور الأول فهو

(1) Ibid, pp. 739 - ff.

اكتشاف تناقضات نظرية الفئات (وهى المعروفة بأغلوطة رسل) . ومن المعروف أن نظرية الفئات جزء من جسم نظرية المنطق عند فريجه وكانتور. وقد أدى هذا الإكتشاف إلى أننا قد نضل فى المنطق أيضاً، أى أن النظرية المنطقية سواء عبرت عن قوانين سيكولوجية أو قوانين لقوانين الواقع فهى ليست حصينة بصورة كافية ضد التناقض .

وقد ذهب بروورBrouwer ، مثلاً، إلى أن تناقضات مثل أغلوطة رسل، التى إنتشرت صور مختلفة منها فى العقد الأول من القرن العشرين ، تدعونا إلى مراجعة موقفنا من بعض من أهم قوانين المنطق، وهو قانون الثالث المرفوع[١] بالنسبة لبروور بالذات. ومن ناحية آخرى ألقت هذه الأغلوطة ، وغيرها بظلال الشك على مشروع توحيد الحساب والمنطق، والذى تبناه فريجه أولاً ، ثم طوره رسل (!!) بالرغم من أنه مكتشف الأغلوطة المشار إليها . ولهذا حاول رسل الإلتفاف حول المشكلة بإضافة نظرية خاصة سماها نظرية الأنماط المنطقية [٢] والتى يشك الكثير من المناطقة الآن فى اعتبارها جزءاً من المنطق بالمعنى الصحيح .

أما التطور الثانى فهو انشغال الفلاسفة التحليليين عموماً بقضية الصلة بين الضرورة واللغة، وهو تطور يرتبط بإتجاه قد يكون توفيقياً بين الإتجاهين المتعارضين السابقين، يدعو أحدهما إلى ربط قوانين المنطق بالفكر ، ويدعو الآخر إلى ربط قوانين المنطق بالعالم، ومعنى هذا أن ترتبط قوانين المنطق باللغة بدلاً من ارتباطها بالعالم أو بالفكر . وقد حاول أصحاب

(١) راجع فى تفصيل هذا الأمر الفصل الثالث من الباب الثالث من هذه الدراسة

(2) Theory of Logical Types

نظرية المواضعة من التحليليين أن يتوسعوا فى تعريف المنطق بحيث يشمل كل الحقائق القبلية بإعتبار أنها حقائق لغوية ، أو حقائق تحكمها القواعد اللغوية والتى هى فى النهاية مجرد مواضعا ت متفق عليها .

ونجد فى هذا السياق أن هانزريشنباخ مثلاً يعرف المنطق بأنه علم قوانين الفكر ، ولكنه يعنى بالفكر هنا ناتج عملية إعادة التركيب العقلانية لهذه العمليات العقلية المسماة بالتفكير أو الفكر، والمقصود هنا بالطبع اللغة، وهى الوسيلة التى نعيد فيها صياغة ما نتوصل إليه بالتفكير كممارسة سيكولوجية يصعب رصد القوانين التى تحكمها ، وخاصة فى ضوء تأثير الأبعاد العاطفية وغير العاطفية على التفكير مما لا شأن للمنطق به من قريب أو بعيد. ولهذا يطالبنا ريشنباخ بالانتقال من تعريف المنطق بأنه تحليل الفكر الى إعتباره تحليلاً للغة ، أو لسمات معينة وملامح خاصة فيهاعلى وجه التحديد (١).

ومن ناحية أخرى نجد أن كواين يركز على التقريب بين الدراسة المنطقية ودراسة ملامح اللغة، أو ملامح معينة منها، لا بغرض الكشف عن قوانين الفكر أو حتى بعض من ملامحه العامة بل بغرض اكتشاف سمات معينة للعالم، ومعنى ذلك أن كواين يرفض ما يذهب إليه هانز ريشنباخ من أن الملامح التى ندرسها فى اللغة الطبيعية ، والتى تمثل السمات المنطقية المميزة لها ترتد فى النهاية إلى عناصر نفسية بدرجة أو بأخرى . إن ما يقرره كواين هو أن الملامح التى تدرسها ترتبط بصورة ما بالعالم ، وليس

(١) راجع فى هذا الصدد دراسة – ريشنباخ الهامة :
Reichenbach, (1947) pp. 1 - 3

بالعالم الداخلى للإنسان (1) .

هذا وقد اتخذ الحوار حول طبيعة المنطق، وقوانينه منعطفاً حاداً فى النصف الثانى من القرن العشرين ، وشغل المناطقة أنفسهم بمحاولة تأسيس النظرية المنطقية من زاوية فلسفية، وهذا أمر ينطوى على إشكاليتين رئيسيتين ننوه بهما هنا فقط .

الإشكالية الأولى هى التحديد الخارجى للنظرية المنطقية، أى أن المسائل المطروحة نهتم فيها بالعلاقة الخاصة بين المنطق وعلوم النفس والنظرية الفيزيقية والعلوم اللغوية بل وغيرهامن العلوم ، أى العلاقات بين المنطق وأحد هذه العلوم أوثق من العلاقات الأخرى هل المنطق يعبر عن قوانين سيكولوجية ؟ أم مرتبط بالعالم وقوانينه؟ أم باللغة؟ أم بالمجتمع؟ أم بالتاريخ ؟ أم أن العلاقة أكثر تعقيداً من مجرد إجابة مباشرة واحد ؟

أما الإشكالية الثانية فتتعلق بالتحديد الداخلى للنظرية المنطقية بمعنى ماهى المسائل التى تعتبر جزءاً أصيلا من المنطق ؟ هل نظرية الفئات مثلاً جزء من المنطق؟ أم أنها خارجة عنه ؟ ماذا عن منطق المساواة Equality ؟ هل هو جزء من المنطق؟ أم يجب أستبعاده من حظيرة المنطق؟ وماذا عن منطق الدرجة الثانية Second order logic ؟ أو المنطق الأعلى عموما Higher order logic ؟

ونحن بالقطع لن نتعرض لمجموعة الأسئلة المرتبطة بهاتين الأشكاليتين بمحاولة الإجابة عنها لسبب وحيد، وهو أننا نقتصر فى دراستنا

---

(١) راجع فى تفصيل الأمر الفصل الأخير من دراسة كواين الشهيرة

Quine, (1970) .

هذه على جزء محدد من النظرية المنطقية تضيق بالنسبة إليه شقة الخلاف بين مختلف المدارس المنطقية حول المسائل التى أشرنا إليها. نلاحظ فقط أن الأشكالية الثانية مرتبطة بالتطور الأول الذى أشرنا اليه منذ صفحات قليلة، وهو الخاص باكتشاف تناقضات نظرية الفئات. والأشكالية الأولى مرتبطة بالتطور الثانى، وهو الخاص بالحوار حول الضرورة واللغة.

إما بالنسبة لموضوعنا فى هذه الدراسة ، وهو نظرية الإستنباط الأساسية فأمر تختفى بالنسبة إليه كثير من القضايا الفلسفية الهامة التى أشرنا إليها تواً . إنه جوهر النظرية المنطقية الذى يعتبر أساس كل بحث تال فى أى من أبواب المنطق . وربما يكون العنصر المشترك بين قوانين الفكر والعالم واللغة مع شئ من التحفظ الذى سنقوم برصده فى حينه وهذا التحفظ يجعلنا نستبقى شيئاً من الفلسفة مرتبطاً بحساب القضايا، مما يؤكد ارتباط المنطق بالفلسفة حتى هذا المستوى الأولى، وإن كان لا يحسم مسألة إرتباطه بالفكر أو باللغة أو بالعالم ، وربما يكون السبب فى ذلك أن الفلسفة لم تحسم أمرها فى هذه القضية الشائكة بعد .

٢ - قيمة المنطق الحديث

ما أسهل أن نصادف من يرفض الفلسفة كنشاط إنسانى ذى قيمة حقيقية ويعتبر أن الفكر يستطيع الإستغناء عن هذا المبحث التليد. ونحن بالطبع، نختلف جذرياً مع صاحب هذا الرأى ، ولكن مانهدف إلى بيانه هنا هو أن هذا الرفض لا ينسحب عادة على المنطق سواء التقليدى أو الحديث . صحيح أن بعض من يجمع بين رفض الفلسفة بمعناها التقليدى وقبول المنطق كعلم دقيق يفعل ذلك من منظور أن الفلسفة ، بعكس المنطق، مبحث

تأملى حر لا يتقيد بشكل صارم بقيود المنهج وحدود عدم التناقض التى يلزم بها المنطقى نفسه وغيره بشكل قاطع .

ونحن نرفض هذا الفصل التعسفى بين المنطق والفلسفة ، وألمحنا الى بعض الإعتبارات التى تبرر رفضنا هذا فى السطور السابقة. ونشترك فى هذا الموقف مع جملة الاتجاهات الفلسفية سواء التقليدية، أو الحديثة وعلينا أن ننتبه إلى مقابل غير قليل يجب أن يدفع لقاء هذا، ففى الوقت الذى يلزم فيه المنطق البحث العلمى والفلسفى بمعناه الشامل بقيود صارمةقد يحلو للبعض أن يتخفف منها لسبب أو لآخر، نجد أيضاً أن الاعتبارات الفسلفية تؤثر سلباً (من وجهة نظر معينة) على ثبات النظرية المنطقية، ممايعنى قبولنا لمبدأ إمكان حدوث تغير فى المنطق .

وليس ببعيد عن هذه الروح ما يذكره الفيلسوف الأمريكى الشهير هيلارى بتنام Putnam (١) متأثراً فى ذلك بأستاذه ويلارد أورمان كواين Quine من أن المنطق طوال تاريخه يتعرض للتغير، وأحياناً التغير السريع مثل كل العلوم الأخرى . وخلال القرون المختلفة كان للمناطقة أفكار أو تصورات مختلفة عن مجال موضوعهم،والمناهج الملائمة له .. واليوم نجد أن مجال المنطق يتم تعريفه بشكل أوسع بكثير مما سبق لدرجة أنه يحتوى عند البعض على كل الرياضيات البحتة، سواء اتفقنا معهم حول صحة هذا الرأى أم لا . وكذلك نجد أن المناهج المستخدمة اليوم فى البحث المنطقى رياضية بالكامل تقريباً.

---

(1) Putnam, H. (1971), p. 323

ولنا أن نتصوركيف أن بتنام يفتح بعباراته هذه أبواب التغير في النظرية المنطقية على مصاريعها. ورغم هذا فهو يسلم بأن بعض جوانب المنطق يبدو أنها لا تتعرض إلا لتغير ضئيل، بل قد لا تتغير فعلياً على الإطلاق. وطبقاً للآخذين بهذا الرأى تبقى النتائج المنطقية صحيحة الى الأبد بمجرد إقامة الدليل القاطع عليها. وليس التغير فى المنطق من هذه الزواية نتيجة قبول مبادىء متناقضة مع بعضها فى فترات سابقة، مما يستدعى تعديلاً فى بنية النظرية المنطقية. ليس هذا صحيحاً طبقاً لوجهة النظر التى يعارضها بتنام، والصحيح هو الأسلوب أو المصطلح الرمزى الذى نستخدمه فى التعبير عن المبادىء والقوانين والنتائج المنطقية هو الذى يتغير بشكل هائل، وبهذا يميل المجال المحدد لدراسة المنطق الى الاتساع أكثر وأكثر.

ولا شك أن بتنام يرفض هذا التحليل جملة وتفصيلاً، بل إنه يعلن فى جرأة واضحة أن الأمر الآن يصل الى وجوب الشك بل إنكار الدعوى التقليدية التى ترفض وجود أساس تجريبى empirical foundation للمنطق(١)، وبتنام فى هذا قريب جداً مما أعلنه كواين فى خاتمة مقالة الشهير «عقيدتان جامدتان فى الفلسفة التجريبية» (٢) بالرغم من أن كواين بالتحديد يعلن فى مناسبات أخرى رفضه لمبدأ قابلية المنطق للمراجعة. وعلى كل حال، فالقضية المثارة هنا لا تزال مفتوحة بقوة، ولم يبت فيها المناطقة المعاصرون بشكل نهائى(٣).

---

(1) Ibid, p. 357.
(2) Two Dogmas of Empiricism

(٣) راجع مثلا دراسة مايكل دميت الشهيرة والصادرة عام ١٩٧٦ بعنوان:–
Is Logic Empirical ?

وبغض النظر عن مدى اتفاقنا أو اختلافنا مع أى من طرفى هذا الحوار، وبخاصة فى المدى الذى قد تبلغه النظرية المنطقية فى التغير، نقرر هنا إن الحد الأدنى الذى نتفق فيه مع الطرفين، ومع الكثيرين من المناطقة المعاصرين هو أن قد أصبح للمنطق تاريخ (١) بعد أن ظن الناس أنه ولد كاملاً. ولا شك أن المنطق الكلاسيكى الحديث يؤكد هذه الحقيقة لأن حدوث تغير ما فى نظرية أو نسق نظرى يخلق له تاريخا. وهذا ما حدث بالنسبة للنظرية المنطقية، وهو ما يجعلنا نتوقف بعض الوقت عند الاضافة المرتبطة بتطور النظرية المنطقية، وخاصة منذ منتصف القرن التاسع عشر.

وحتى لا يخدعنا الحديث عن سمات مميزة للمنطق الحديث أو الرمزى كما يسمى أحيانا قياساً الى المنطق التقليدى مما قد يعطى الانطباع بانفصال النسقين المنطقيين بشكل كامل، نرى أنه من الحكمة أن نتوقف عند ملامحه العامة قبل أن نسرد عناصر تفوقه على المنطق التقليدى، والأخير هو المنطق الأرسطى ومعه كل الكتابات التى لحقت كتابات أرسطو طوال قرون عديدة حتى ظهرت الدراسات المنطقية الرياضية الحديثة. ان السمات الجوهوية للمنطق كما يخبرنا لويس Lewis تتلخص فيما يلى(٢)

أولا:

موضوع المنطق الرمزى أو الرياضى الحديث هو موضوع المنطق فى أى صورة من الصور، وهو- كما يرى لويس- مبادىء الاجراءات العقلية أو التأملية بصورة عامة، بخلاف المبادىء التى تنتمى كلية الى فرع معين من

(١) فاخورى د. عادل (١٩٨٨) : المقدمة

(2) Lewis, C. I (1918), pp. 2- 3

الدراسة. يذكرنا لويس، إذن، بوحدة موضوع المنطق سواء كان تقليديا أم حديثا. غير أن من واجبنا أن نقرر هنا أن وحدة موضوع المنطق يجب ألا تقف حجر عثرة أمام طموح أصحاب المنطق الحديث الذى يسعى الى توسيع دائرة تخصصهم، ومحاولة فرض نفوذ النظرية المنطقية فى مناطق جديدة لم يطرقها المنطق التقليدى من قبل.

ثانيا:

أن الوسيط أو الأداة التى نستخدمها في التعبير عما هو مقبول أو مرفوض منطقياً هى الرموز (الذهنية)، ذلك أن لكل رمز مستقل ما يمثله من تصور واضح وبسيط. ومن هنا تأتى التسمية عند لويس للمنطق الحديث بالمنطق الرمزى. ونحن هنا لسنا بعيدين عن المنطق التقليدى بصورة كبيرة، فقد استخدم أرسطو الرموز وبخاصة رموز المتغيرات، وان كان بصورة جزئية الى حد كبير، مما يجعل لإحجامنا عن وصفه بالمنطق الرمزى معنى يكفى للتميز بين النسقين المنطقيين بصورة مقبولة.

ثالثا:

أن بعض (الصور الذهنية) تمثل متغيرات، وهى تعتبر حدود النسق، أى الحدود التى يتعلق بها النسق ويفرض عليها نفوذه، ولهذه المتغيرات مجال محدد من الدلالة بحسب النظرية المنطقية التي نكون بصددها. وكذلك هناك الثوابت، وهى تشير الى أنواع العلاقات التى يعترف بها المنطق بين الصور الذهنية التى تمثلها المتغيرات. ومن جهة أخرى تمثل الثوابت قيداً على مجال المنطق بحيث لا يستطيع التعامل مع علاقات لا تجد نظيراً مناسباً لها داخل مصطلحه الرمزى المتفق عليه مسبقاً.

رابعا:

يتم تقديم نسق المنطق الرمزى استنباطياً، حيث يتم اشتقاق مجموعة من المبرهنات من عدد قليل نسبياً من المبادىء مقررة بواسطة الرموز عن طريق عمليات محددة ومصاغة بدقة، هذا إذا طبقنا ما يعرف بالنسق الأكسيوماتيكى. وقد عرف المناطقة بعد نشر دراسة لويس التى نعتمد عليها فى السطور الحالية أنماطاً أخرى من طرق عرض النسق الإستنباطى، وهو مانسميه بأنساق الاستنباط الطبيعى، والتى نترك أمر التفصيل فيها للباب الثالث من هذه الدراسة، وهو المخصص لعرض نظرية البرهان. المهم فى الأمر أن الطابع النسقى الرمزى أو الصورى الحديث سمة جوهرية له تميزه نوعياً عن المنطق التقليدى القديم.

وقد يذهب البعض منا الى أن المنطق التقليدى لا يفتقد الطابع النسقى الاستنباطى بصورة مطلقة، وإنما صا غ أرسطو نظريته المنطقية بصورة نسقية محددة، وطورها تلاميذه وخلفاؤه فى إتجاه نسقى محدد. كما أن لوكاشيفتش قد برهن بصورة رائعة على إمكان إعادة بناء النظرية المنطقية التقليدية نسقياً بالمعنى المعاصر لفكرة النسق الاستنباطى. ولكن يبقى مع ذلك أن النسق بالمعنى المعاصر أدق وأوسع مجالاً جداً، كما أن محاولة لوكاشيفتش هى إعادة تركيب معاصرة لنظرية قديمة، أى أنها تستخدم الأدوات المعاصرة، وتستثمرها، بمعنى أننا إزاء ميزة تحسب للمنطق المعاصر، وليست ضده.

تناولنا فى النقاط الأربعة السابقة مواضع إتفاق المنطق الحديث مع المنطق التقليدى مما يؤكد عنصر الإستمرار بين النسقين الصوريين.ولعلنا

نتوقف الآن مع إيفرت بث Beth[1] قليلاًعند مظاهر تفوق المنطق الحديث على المنطق التقليدى، وهذا على افتراض أن مجال المقارنة لا يقتصر على حساب القضايا فقط.

(أ) يقدم المنطق الرمزى تحليلاً تفصلياً بشكل أكبر مما يفعل المنطق التقليدى لصور الاستدلالات. ومن الأمثلة التى يعطيها بث للدلاله علي وجود هذه الظاهرة المقارنة التي يعقدها بين التحليل التقليدى للضرب FESTINO والتحليل الذى يقدمه بث بنفسه فى الدراسة التى تعد أحد مصادر البحث الحالى. ويزعم بث أن تحليله للضرب المنطقى المشار إليه يفضل بكثير ما قدمه أرسطو فى التحليلات الأولى، وأنه يستحيل أن يوجد تحليل أكمل مما قدمه هو باستخدام الآليات الحديثة ويؤكد بث فى نفس الوقت أن الأفكار التى يرد الضرب اليها، والخطوات التسعة التى ينحل اليها الاستدلال موجودة كلها بشكل متفرق فى كتابات أرسطو، أو على الأقل يمكن افتراض أنها كانت معروفة لديه بشكل غير مباشر، ودون أن ينطوى ذلك على مبالغة من أى نوع.

(ب) يبين المنطق الرمزى الحديث أنه كانت هناك مشكلات معينة شغلت المناطقة التقليديين، غير أنها تقوم على أسس واهية، وتستند الى أفكار غير دقيقة. فإذا ما صححت هذه الأفكار تختفى هذه المشكلات ببساطة. ومن أهم الأمثلة على هذا النوع من المشكلات الزائفة الخلاف التقليدى المعروف حول إمكان رد الأقيسة الشرطية الى الأقيسة الحملية،

(1) Beth, E. (1955), pp. 34- 38

وهو خلاف شغل المناطقة التقليديون أنفسهم به بصورة مكثفة، وسودوا حوله آلاف الصفحات.

وقد أوضح المنطق الحديث أن هذه المشكلة لا وجود لها على الإطلاق، لأن كلا القياسين ينتمى الى نظرية مستقلة الى حد كبير. بل إننا إذا زعمنا لأحد النظريتين أولية من نوع ما، كانت من نصيب القياس الشرطى الذى تبين دراستنا الحالية أنه جزء أصيل من حساب القضايا على النحو الذى نجده فى الفصل الأول من الباب الثالث، وفى مواضع أخرى كثيرة. أما القياس الحملى فلا مجال لدراسته فى هذا المؤلف لأنه ينتمى لحساب المحمول المعاصر. ولكن المهم فى الأمر أنه يفترض فى بنائه نتائج محددة تقع فى حساب القضايا الذى يعد القياس الشرطى جزءاً لا يتجزأ منه، كما سبق أن قلنا.

(جـ) يبين المنطق الرمزى أيضاً أن هناك مشكلات أخرى أثيرت عن حق لدى المناطقة التقليديين، ولكن لم يستطع واحداً منهم حلها بصورة مرضية، وقد استطاع المنطق الحديث التصدى لها بجدارة. ومن ثم فالوسيلة المثلى لتناول هذه المشكلات هى استخدام أدوات وآليات المنطق الحديث. ولعل أهم ما يمكن طرحه هنا كمثال على تفوق المنطق الرمزى فى هذا الجانب هو تحليل العلاقات. ونحن نعلم أن تحليل الاستدلالات التى تعتمد على العلاقات يقود دائماً الى صعوبات جمة تستطيع التقنيات المنطقية الحديثة وحدها أن تتعامل معها بل أننا قد نذهب الى حد القول بأن المنطق الحديث لم يستنفذ بعد كل إمكانيات التطور المتاحة أمامه بالنسبة لموضوع

العلاقات بالتحديد.

(د) اكتشف المنطق الرمزى مشكلات أساسية أهملها المنطق التقليدى تماما، بل لم ينتبه المناطقه الى وجودهاأصلا، بسبب فشلهم فى التمييز بشكل حاسم بين مفهومى اللزوم المنطقى اللذين سيرد فى صلب هذه الدراسة تفصيل القول فيهما. وتجدر الإشارة فى السياق الحالى الى أن المنطق الحديث قد ساعد على تكثيف محاولات تخليق علاقة الاستدلال على أساس تركيبى فى الوقت الذى تكون فيه معطاة على المستوى الدلالى(١)، وهذان هما جناحا مفهوم اللزوم.

وقد ساعد نجاح المناطقة المعاصرين فى التمييز بين هذين النوعين من اللزوم على البحث فى مسائل متقدمة جداً فى العشرينيات من هذا القرن مما خلق إمكانية البحث فى قضية اكتمال completeness النسق المنطقى والرياضى واتساقه consistency ، وهذا ما فعله جودل Godel النسبة للمنطق الأولى، وكذلك كان ألفرد تارسكى هو أول من قدم تعريفا مرضيا لفكرة اللزوم الدلالى بالتحديد.

إن ما توقفنا عنده فى السطور السابقة مجرد أمثلة عابرة لا تستوعب كل ما قدمه المنطق الحديث من اضافات أصيله لم يكن فى مقدور المنطق بشكله التقليدى القديم أن يقدمها. ولا شك أن الكثير من هذه الاضافات سينكشف للقارىء مع فصول هذه الدراسة، وغيرها من الكتابات التى تستعرض المنطق الحديث بصورة نسقية متكاملة. يبقى أن نعطى لمحه سريعة عن تاريخ المنطق، وتاريخ منطق القضايا بصورة خاصة.

(1) Sundholm, G. (1983), p.133

٣- فى تاريخ منطق القضايا

من الثابت تاريخياً أن الدراسة التى أصدرها رسل وهوايتهد فى ثلاثة أجزاء بعنوان المبادئ الرياضية Principia Mathematica تمثل أكمل وأكثر المحاولات طموحاً لعرض المنطق الكلاسيكى فى أقوى صورة ممكنة. كذلك سعى المؤلفان إلى اشتقاق الرياضيات من المنطق، أو التوحيد بينهما على النهج الذى أسسه فريجه قبل ذلك بربع قرن تقريباً .

وسريعاً ما أنطلق المناطقة من هذا العمل فى اتجاهات شتى بهدف تطوير أو تعديل أو نقد النسق المنطقى الذى لخص به رسل وهوايتهد جهود المناطقة منذ منتصف القرن التاسع عشر تقريباً . ونحن نهتم فى هذه الدراسة بأحد اتجاهات البحث التى حاولت استخلاص نظرية خاصة أو فرعية داخل نسق البرنكبيا، تتميز بأنها بسيطة، ومع أن كل إجزاء النسق الأخرى لها جذورها فى هذه النظرية إلا أن الأخيرة لها استقلالها عن تلك الإجزاء الأخرى.(١)

تلك هى نظرية حساب القضايا، أو نظرية الاستنباط الأساسية كما نسميها فى عنوان هذه الدراسة، أو المنطق الأولى كما يسميه وليم نيل، أو نظرية الاستنباط كما يسميها رسل وهوايتهد فى الفصل الذى خصصاه لها فى الجزء الأول من البرنكيبا. وعادة ما تظهر تلك النظرية كجزء من أى نسق منطقى كامل. إنها، كما يقول ألونزو تشيرش، تمثل جزءاً خاصاً، ولكنه ضرورى للنظرية العامة فى المنطق."(٢) هذه النظرية هى الموضوع الذى

---

(1) Post, E. (1921), p.265

(2) Church, A. (1956), p.69

تخصص له هذه الدراسة بالكامل.

وربماكان المنطقى إميل بوست Post أول من أعطى هذه النظرية إهتماماً خاصاً ، فقد خصص رسالته للدكتوراه عام ١٩٢٠ لهذه النظرية، واستطاع أن يتوصل إلى كثير من الاستبصارات المتعلقة بها، وبإمكانيات تطويرها، وخاصة فيما يتعلق بفكرة قوائم الصدق، والمنطق كثير القيم وغيرها من الموضوعات التى تناولها هذا البحث القيم الذى صار بعد نشره عام ١٩٢١ من كلاسيكيات المنطق المعاصر. هناك أيضاً جهود بول بيرنايز أحد تلاميذ هلبرت الذى نشر دراسة لنسق البديهيات الخاص بحساب القضايا فى البرنكبيا . وهذه الدراسة تعتبر بداية الاهتمام بميتا نظرية المنطق الأولى . كما أنه ألمح فيها إلى امكان استبدال قواعد الاشتقاق بالبديهيات وعلى النحو الذى طوره جنزن وجاسكوفسكى فيما بعد.

وفى بولندا كان الاهتمام أكبر، وتوافر على حساب القضايا فريق من الباحثين العظام ضم يان لوكاشيفتش Luckasiewicz، وألفرد تارسكى Tarski ، ولندنباوم Lindenbaum ، وسوبو شنسكى Sobocinski ، وغيرهم . هذا وقد لخص لوكاشيفتش وتارسكى أهم النتائج التى توصلا إليها مع زملائهما فى بحث هام [1]، إذ كان محور اهتمامهم هو دراسة أبسط الانساق الاستنباطية . وقد تواكب مع هذا الاهتمام إعادة إكتشاف المنطق الرواقى كنسق متميز، وربما يعود الفضل الأول فى هذا إلى جهود لوكاشيفتش[2] .

(1) Luckasiewicz, J.& Tarski, A. (1930)

(٢) راجع فى موضوع المنطق الرواقى الفصل الثانى من :- أحمد أنور (١٩٨٣)

ومن بين ماظهر للباحثين، فى هذا الخصوص، أن جهود المناطقة الرواقيين فى المنطق ذات قيمة عالية جداً. بل إن نظريتهم هى المصدر التاريخى لنظرية الاستنباط الأساسية، بالمعنى المعاصر وليس المنطق الأرسطى الذى يقع فى جزء آخر من النظرية وهى تلك الخاصة بالمنطق العام كما أوضحنا. غير أنه من الخطأ القفز من هذه الملاحظة الهامة والتى أصبحت موضع اتفاق عام بين الدراسين فى مجال تاريخ المنطق، إلى نتيجة مؤداها أننا بصدد مقارنة تفضيلية بين المنطقين. وحقيقة الأمر أنهما متكاملان وليسا متنافسين كما ظن أصحابهما منذ القدم .

صحيح أن التاريخ ظلم المنطق الرواقى الى حد بعيد، لدرجة أن بعض نتائجه ألحقت كأجزاء تكميلية بالنظرية القياسية الأرسطية ، دون إشارة، أو حتى ذكر لأصحاب المدرسة الرواقية. أما ما تبقى من دراساتهم فقد عده الدارسون ومؤرخى المنطق التقليديون لغواً لاطائل من ورائه. وهكذا فإن إحد أفضال المنطق المعاصر كانت رد اعتبار المنطق الرواقى ووضع العلاقة بينه وبين المنطق الأرسطى فى إطارها الصحيح، وذلك بأن جمع بينهما فى إطار نظرية عملاقة، تتجاوزهما معاً، وتصحح أخطاء محددة وقع فيها أصحابهما فى نفس الوقت .

نعود إلى نظرية الإستنباط الأساسية المعاصرة لنلاحظ أن اتجاه بوست والمدرسة البولندية الخاص بدراسة هذه النظرية بصورة مستقلة لم يستمر طويلاً بالصورة التى قد توحى بها السطور السابقة صحيح أن كثيراً من الدراسات تعطى حساب القضايا مكانا بارزاً ومساحة كبيرة فى عرض

النسق المنطقى، ولكن نادراً مانجد دراسة تتعلق بالنظرية بشكل منفرد، إلا إذا كانت مقالاً صغيراً هنا، أوهناك، وبغرض توضيح فكرة أو التعليق على أخرى، وهكذا ونستثنى من هذا الحكم دراستان، أو بالأخرى دراسة هامة وكتاب موجه الى الجمهور.

الدراسة الأولى قدمها نيدتش Nidditch عام ١٩٦٢ بعنوان منطق االقضايا Propositional Logic ، وهى دراسة صغيرة نسبياً ولكنها تعرض نسقاً متقدماً يعتمد على البديهيات Axiomatic Systems، أى أنها تنتمى إلى ما يعرف بأنساق البديهيات، وفى هذا تختلف دراستنا هنا عنها، ذلك أننا نقدم نسقا يعتمد على أسلوب الإستنباط الطبيعى الذى لا يرى ضرورة للإعتماد على بديهيات أو مصادرات على النحو الذى نوضحه بالتفصيل فى الباب الثالث من الدراسة. أما الكتاب فهو أحدث نسبياً، ذلك أنه صدر عام ١٩٧٤، والمؤلف ليس منطقياً معروفاً على نطاق واسع اسمه هوارد بوسبيسل Pospesel وعنوان الكتاب هو منطق القضايا Propositional Logic أيضاً .وليس الكتاب دراسة بالمعنى الدقيق لمنطق القضايا كما يعترف بذلك بوسبيسل فى مقدمة الكتاب وإنما يكمن الفضل الأكبر له فى أنه استعان بقواعد نسق حساب القضايا كما وردت عند لمون[1] فى الفصل الأول من كتابه، وطبقه على أمثلة عديدة ومتنوعة من الحياة العامة ، وهذا فى حد ذاته عمل عظيم، ذلك أن الكتاب يستعين بالأمثلة الحية ، والأشكال التوضيحية، والصور التى قربت نسق لمون للقارئ

(1) Lemmon, J. (1965)

العادى إلى درجة بعيدة .

وقد سعدت حين علمت قبل كتابة هذه المقدمة بأيام قليلة بوجود دراسة صغيرة لباحث عربى مغربى هو الدكتور محمد مرسلى بعنوان "دروس فى المنطق الاستدلالى الرمزى" تعرض بإختصار وإن كان بعيداً عن الإخلال لبعض موضوعات حساب القضايا بهدف تدريسى بحت . ولن نتوقف عند هذه الدراسة الآن ذلك أن من الضرورى أن نعطيها حقها فى سياق آخر(١)

غير أن الباحث يشعر أن دراسته تحاول أن تجمع بين مميزات الدراسات المشار إليها، ويزيد ، وفى نفس الوقت تتجنب عيوبها قدر الإمكان إن التناول النسقى فى هذه الدراسة يحاول أن يضاهى ما فعله نيدتش بإختصار وفى إطار نسق استنباطى مختلف، ويحاول فى نفس الوقت التوسع فى الأمثلة المتنوعة وإن كانت أقل مما نجده عند بوسبيسل. إننا نهدف إلى التوجه إلى مستويين من القراء فى نفس الوقت . المستوى الأول هو القارئ المتخصص الذى يبغى التعرف على النسق المعاصر لحساب القضايا بصورة متكاملة تحدث لأول مرة باللغة العربية ،أما المستوى الثانى فهو القارئ الأقل تخصصاً وربما أيضاً طالب الفلسفة، والذى يصلح المحتوى العلمى للتدريس إليه خلال عام جامعى واحد، وهنا تتدرج الأمثلة فى التعقيد ونقدم شروحاً تفصيلية لخطوات الحل فى كل مرة .

وكل ما أرجوه وأنا أتقدم للقارئ العربى بهذه الدراسة أن يكون فيها بعض القيمة ، وبما يعوض ما أنا على يقين من وجوده من نقص وعيوب عديدة .

---

(١) للباحث دراسة أخرى قيد الاعداد بعنوان « المنطق فى الكتابات العربية المعاصرة »

البـــاب الأول

نظريـة التركيب

الباب الأول

نظـــريـــة التـركـــيب

يقتصر اهتمامنا فى هذه الدراسة على نظرية حساب القضايا دون غيرها من النظريات المنطقية المعقدة، تلك الأخيرة تفترض هذا الحساب، وتبنى عليه الكثير . أما خطتنا فتقوم على تقسيم الدراسة إلى ثلاثة أبواب . فى الباب الأول نتعرف على اللغة المنطقية . وفى الباب الثانى نتعرض لدلالة هذه اللغة ، أى على شروط صدق صيغها، وشروط صحة الاستدلالات التى تضم تلك الصيغ . أما الباب الأخير فهو لب نظرية المنطق الطبيعى، أو الاستنباط الطبيعى، ونهتم فيها بالاشتقاق،أو نظرية البرهان أى بقواعد اشتقاق نتيجة أى استدلال من مقدماته .

الباب الأول ، إذن ، يهتم باللغة المنطقية، ونحن نعتبرها لغة خاصة، أى لغة مستقلة بشكل كامل عن اللغة الطبيعية، سواء اللغة العربية، أو الإنجليزية، أو أى لغة إنسانية أخرى . صحيح أن هناك نقاط التقاء وتفاعل محدودة، ولكن يظل استقلال اللغتين أمراً لا جدال فيه، وتظل مسألة نقاط التقائهما قضية فلسفية مفتوحة. وينقسم البحث فى هذا الباب إلى فصلين. نهتم فى الأول باللغة المنطقية فى حد ذاتها، وفى الفصل الثانى نهتم بالبحث في الصلة بين اللغتين المنطقية والطبيعية.

الفصل الأول موضوعه تركيب اللغة المنطقية كلغة صناعية نتناول فيه مفرداتها، وهى المتغيرات والثوابت. ومن الطبيعى أن يقتصر اهتمامنا على

ثوابت ومتغيرات حساب القضايا فقط . المتغيرات رموز تحل محل قضايا كاملة، والثوابت علامات تنشئ صيغاً مركبة من رموز المتغيرات وفق قواعد معينة وقواعد الانشاء أو التركيب ذات أهمية قصوى، ولا مجال للبس أو الغموض فيها على النحو الذى نصادفه فى جميع اللغات الطبيعية دون استثناء . ولذلك نهتم بقواعد تركيب *اللغة* المنطقية، ونتناول أسلوباً مبسطاً لاختبار مدى تطابق الصيغ مع مقتضي هذه القواعد، وهو الأسلوب المعروف بالأشجار التركيبية.

ولا تقتصر أهمية هذا الأسلوب على تحديده للصيغ صحيحة التركيب، والفصل بينها وبين الصيغ غير صحيحة التركيب أو التى لا معنى لها، بل تمتد وظيفته إلى وضع الأساس الذى سيطبق عليه أى أسلوب لاختبار الصيغ المنطقية صحيحة التركيب من الزاوية الدلالية.

أما فى الفصل الثانى فنبدأ من اللغة الطبيعية لنقارن بين ملامح اللغة العربية مثلاً واللغة المنطقية على مستويات متعددة وينعكس هذا على قضية المقارنة بين النظرية المنطقية الصورية التى ندرسها ومنطق اللغة الطبيعية عموماً، مع التركيز على اللغة العربية إلى حد ما. وربما يعوق التعميق المطلوب توافره فى معالجة هذه القضية كون النظرية التي تقتصر دراستنا عليهالا تستطيع التعامل مع البنية الداخلية للقضايا التى تشكل وحدات الصيغ المركبة، لأنهاتعطى القضية رمزاً مفردا هو المتغير مما يدل على أن القضية تعامل فى حساب القضايا كالصندوق المقفل الذى لا يحق لنا أن نفتحه على الإطلاق. فقط نعطيه إحدى قيمتين، إما الصدق أو الكذب.

ولعل النظرية المنطقية الكاملة، وهى ما يعالجه المنطق العام، أن تكون

موضوعاً مناسباً بصورة أفضل للمقارنة مع اللغة الطبيعية. وبحيث نستطيع أن نقرر مدى إمكان حسم قضية الصورة المنطقية للغة الطبيعية عندها . أما الآن فمناقشتنا لهذه القضية تتسم بالنسبية والمحدودية، لأننا فى إطار حساب القضايا نتحرك على أرض محدودة وإن كانت دقيقة ويقينية النتائج إلى حد بعيد جداً، فضلا عن كون طبيعة الإجابة التى نخرج بها فى النطاق الذى تغطيه ذات دلالة بالنسبة للقضية الكبرى، قضية الصورة المنطقية.

الفصل الأول

تركيب اللغة المنطقية

الفصل الأول
تركيب اللغة المنطقية

نحاول فى السطور التالية التعرف على مفردات لغة نظرية الاستنباط الأساسية، وهى نظرية حساب القضايا كما سبقت الاشارة إلى ذلك، ثم ننتقل إلى تحديد قواعد تركيب الصيغ formulae باستخدام هذه المفردات. الصيغ صحيحة التركيب well formed formulae تمثل وحدات بنائية فى تكوين ما سنسميه المتتابعة sequent . والمتتابعة عبارة عن الصورة المنطقية لاستدلال معين، وهى تتكون من مجموعة من الصيغ صحيحة التركيب، إحداها هى النتيجة، وهى تلى ثابت اللزوم أو الاستنتاج، وبقية الصيغ تسبق هذا الثابت، وتسمى المقدمات.

وتتكون مفردات لغة حساب القضايا من رموز خاصة تستعار من أبجدية إحدى اللغات الطبيعية أو من رموز الرياضيات، وقد يتم خلقها خلقا. وهذا لا يعنى أبداً أى صلة لهذه المفردات أو للغة المنطقية التى يتم تركيبها منها باللغة الطبيعية التى نستعير شيئاً من أبجديتها. فكما أوضحنا سابقاً، اللغة المنطقية لغة صناعية خاصة، ومن الضرورى أن يكون سهلاً على دارسى المنطق والمتحدثين بلغات طبيعية مختلفة تداول النتائج التى يصلون إليها والحوار حول مدى صحتها بلغتهم العالمية المتفق عليها.

وتنقسم المفردات إلى نوعين من الرموز: الأول هو المتغيرات والثانى هو الثوابت، وهما يختلفان جذرياً من حيث دور كل منهما. هذا وينتج وضع الثوابت والمتغيرات معاً وفق قواعد صارمة عدداً لا متناهيا من الصيغ

صحيحة التركيب. وأى إخلال بقواعد التركيب هذه يحيل أياً منها إلى صيغة غير صحيحة التركيب ill formed formulae ، ومن ثم تستبعد من حظيرة المنطق كلياً.

والمتغيرات، كما فى الرياضيات، رموز لا تشير إلى معنى محدد، وفى حساب القضايا تشير إلى قضايا أو جمل مفردة، أى منظوراً إليها دون أدنى اعتبار لتركيبها الداخلى. وقد تكون نفسها قضية مركبة، ولكننا نتعامل معها باعتبارها قضية ذرية بتعبير رسل (١)، أى أننا نستغنى عن استخدام تركيب القضية الداخلى فى استنباط علاقات منطقية من أى نوع. ولهذا لا يلتصق رمز ما بقضية محددة بصورة مطلقة. وإنما القيد الوحيد هنا أنه حين نرمز لقضية برمز معين نلتزم فى كل مرة ترد فيها القضية، سواء فى ثنايا الصيغة أو المتتابعة، أو فى خطوات البرهان عليها، بنفس الرموز. نستطيع أن نختار رمزاً آخر منذ البداية بشرط تغييره فى كل المواضع التى يرد فيها.

وكما ذكرنا مسبقاً، فالأبجدية التى نستعير منها رموز المتغيرات، أو الثوابت لا تعنى مطلقاً أننا نستخدم اللغة التى تستخدم فيها هذه الأبجدية، بل نحن فى المنطق بصدد لغة صناعية خاصة، ولذلك لا أرى حرجاً على الكاتب العربى أن يستعين بالأبجدية اللاتينية، كما سنتبع فى بحثنا هذا . بل قد يساهم هذا، من زاوية أننا متحدثون باللغة العربية وكاتبون بها، فى تأكيد خصوصية اللغة المنطقية، واختلافها عن لغتنا الطبيعية العربية. ولهذا

---

(١) راجع فى هذا الصدد الكثير من كتابات رسل، وبخاصة مجموعة مقالاته الشهيرة بعنوان:
The Philosphy of Logical Atomism.

نستخدم الحروف التالية فى الدلالة على المتغيرات الخاصة بحساب القضايا.

'P' , 'Q' , 'R' , 'S' , 'U' , ... etc.

ا - الثوابت المنطقية:

وهى رموز تستخدم فى الربط بين المتغيرات لتكوين صيغ مركبة، بحيث تعطى معنى محدداً جديداً. ويمكن تطبيق هذا الأمر أكثر من مرة، بل إلى مالا نهاية له من المرات، لتكوين صيغ أكثر تركيباً من صيغ أبسط عن طريق استخدام نفس الثوابت أو غيرها. وتنقسم الثوابت إلى ثلاثة أنواع من حيث عدد المتغيرات التى تتعلق بها.

أ- **هناك أولاً الثوابت الصفرية**، وهى الثوابت التى لا تتعلق بأى متغيرات على الإطلاق، وإنما هى كالمتغيرات أو الصيغ المركبة من حيث وظيفتها. ومثل هذه الثوابت لا ترد فى كثير من الأنساق المعاصرة، وما كنا لنلاحظها أو نلزم أنفسنا بها لولا أننا نلتزم بنسق الاستنباط الطبيعى الذى وضع أصوله جرهارد جنزن G.Gentzen[1]، والذى يوظف فيه بشكل جزئى ثابتين من هذا النوع، ولولا الدور التوضيحى الذى تلعبه بالنسبة لبعض نقاط غموض فى النسق الاستنباطى ستتضح فى حينها.

نستخدم فى نسقنا الحالى ثابتاً واحداً، وهو ثابت التناقض، أو النفى، أو الكذب، ويسمى أحيانا The False ، وهو يأخذ قيمة الكذب دائماً، ورمزه هو "Λ" ، ولا توجد فى اللغة الطبيعية ألفاظ أو عبارات محددة تقابل هذا الرمز، فهو اعلان بوجود تناقض ما داخل إطار نسق أو برهان معين،

---

(1) Gentzen, G. (1935).

وسنرى فى حالات معينة أنه يمكن توظيفه فى صيغ مركبة بصورة مقبولة.

وتجدر الإشارة إلى أننا لن نتوسع فى توظيف هذا الثابت (١)، على هذا النحو، وسنبين حين نتعرض لنظرية البرهان Proof Theory، الكيفية التى يوظف بها فى تنظيم عمل بعض القواعد الاشتقاقية، وسنوضح، فضلاً عن ذلك، الأساس الذى تستند إليه بعض الأنساق فى استبعاده من اللغة المنطقية كلية.

تبقى الإشارة إلى أن ثابت الكذب له وجه آخر. هذا الوجه يتمثل فى السلوك المنطقى الذى يتفاعل به هذا الثابت مع بقية الرموز فى النسق. سنرى بجلاء أن الثابت يسلك ما يشبه سلوك المتغير، أو بالأحرى الصيغة البسيطة على الوجه الذى سنبينه بعد حين. وسبب التحفظ فى اعتبار سلوكه مطابقاً سلوك المتغير، هو أنه لا يظهر ضمن قائمة المتغيرات التى قدمنا الحديث عنها. ولعل هذا هو سبب تفضيل اعتباره صيغة كاملة أكثر من اعتباره متغيراً، وفى نفس الوقت لا نعتبره صيغة مركبة، لأنه لا يمكن تحليله إلى صيغ أبسط.

أما الثابت الثانى الذى نجده عند جنزن فهو ثابت الصدق ويسميه The True ، ورمزه هو مقلوب رمز ثابت الكذب، أى 'V' ، ونستطيع أن نفهم الدور الموازى لدور الثابت الآخر، وإن كان فى اتجاه عكسى تماماً، والذى يمكن أن يلعبه ثابت الصدق فى النسق المنطقى. ولكنهما يتشابهان

---

(١) من الأنساق الهامة التى يتم فيها استخدام ثابت التناقض كثابت أساسى النسق P الذى قدمه ألونزو تشيرش. راجع فى هذا الصدد:

Church, A. (1956) pp. 62 ff

فى أن كلا منهما ثابت منطقى لا يربط بين متغيرات، وإنما يسلك سلوك الصيغ البسيطة. أما وجه الشبه الثانى فهو أن كلا منهما ثابت لا نجد له نظيراً محدداً فى اللغة الطبيعية سواء العربية أو الإنجليزية. وإنما تتحدد قيمة وجود كل منهما لأسباب دلالية أو اشتقاقية ستتضح فيما بعد.

ب- **مجموعة الثوابت الثانية** لا تضم سوى ثابت واحد، هو **ثابت النفى**، وما يجعله متفرداً فى مجموعة خاصة به هو أنه يرتبط بمتغير واحد، أو بصيغة واحدة، ورمزه هو '~' فحين نقول مثلاً:

«محمد ليس فى منزله الآن»

تكون الصورة المنطقية للقضية هى:-

"~ P"

على أساس أن "P" ترمز إلى القضية «محمد فى منزله الآن»، ويسبق المتغير ثابت النفى الذى يقابل لفظ «ليس» فى القضية المذكورة.

ومن هذا يتضح أن ثابت النفى يقابل أدوات النفى التى تستخدم فى اللغات الطبيعية المختلفة للدلالة على انكار صدق قضية بكاملها، مثل «ليس»، و «غير»، و«لا» وغيرها من الكلمات الدالة على نفى صدق القضية الأصلية. إلا أننا بعد قليل سنرى أسباباً مقنعة لإنكار تطابق الثابت مع الأدوات اللغوية الطبيعية التى ذكرناها تواً بشكل كامل.

وسنرى بعد عرض بقية الثوابت أن النفى يمكن تطبيقه على أى صيغة مهما كانت لتكوين صيغة مركبة منفية جديدة تأخذ قيم صدق عكسية بالنسبة للصيغة الأصلية، وهذا على أساس أننا ننظر إلى الصيغة الأساسية باعتبارها تسلك سلوك المتغير الذى نسبقه بثابت النفى على النحو الذى

سيتبين بعد حين، ويقوم ثابت النفى بتغيير قيمة الصيغة الأساسية إلى النقيض تماماً. الحالة التى تصدق فيها تصبح كاذبة، والتى تكذب فيها تصبح صادقة.

غير أنه من الواجب التحفظ على اعتبار ثابت النفى مطابقاً أو مرادفاً فى المعنى لكلمة «ليس» أو «غير»، أو ما يقوم مقامهما فى اللغة الطبيعية. ذلك أن مقتضيات استخدام اللغة، تجعل إدخال لفظة من هذه الألفاظ على جملة مثبتة بمثابة تغيير لقيمة صدق القضية، ولكن ليس بالضرورة إلى نقيض القضية الأصلية. (١) ولنأخذ على سبيل المثال ما يلى:

أ- كان باب الحجز مفتوحاً حتى أمس.

- لم يكن باب الحجز مفتوحاً حتى أمس.

ب- بعض الكتب مفيد.

- بعض الكتب ليس مفيداً.

لاشك أن تأمل المثال الأول قليلاً يكشف عن أن الجملة الثانية ليست نفياً دقيقاً للأولى، وكذلك الثانى الذى نعرف من كتب المنطق التقليدى أن الجملتين داخلتان تحت التضاد وليستا متناقضتين. ولذلك فقد يكون من الأوفق اعتبار أن ثابت النفى يقابل التعبير اللغوى «ليس صحيحاً أن»، بحيث يكون نفيا الجملتين السابقتين الصحيحان هما:

أ- ليس صحيحاً أن باب الحجز كان مفتوحاً حتى أمس.

بَ- ليس صحيحاً أن بعض الكتب مفيد.

---

(1) Strawson, P. (1952): p. 79.

ونعود لنؤكد أن هذه الاعتبارات لا تسقط العلاقة الوثيقة بين ثابت النفى، وعلامات النفى التى تستخدم فى اللغة الطبيعية، والسبب فى تقديرنا لوجود هذه الحالات العكسية يعود أولاً وأخيراً إلى الصورة المنطقية للجمل التى تدخل عليها أداة النفى. فمثلاً الجملة الأولى إذا كانت «كان باب الحجز مفتوحاً» فقط لصار النفى مقبولاً، ولكن إضافة عبارة «حتى أمس» إليها جعل وظيفة أداة النفى مختلفة بحيث اختلفت عن استخدام عبارة «ليس صحيحاً أن» . وكذلك الحال بالنسبة للجملة الثانية المعروفة فى المنطق التقليدى بأنها جزئية موجبة، ونفيها هو الكلية السالبة، أما دخول النفى على الجملة فى صورتها العادية فأدى وظيفة مختلفة بأن جعلها جزئية سالبة.

نضيف نقطة أخيرة تتعلق بالدور الذى يلعبه ثابت النفى، وعلاقة ذلك بثابتى التناقض، والصدق. ويرتبط هذا، كذلك، بالموقف الذى تتخذه النظرية من ثابت التناقض ومدى توظيفه بشكل واسع فى النسق المنطقى، باعتبار أن نفيه هو ثابت الصدق، وأن نفى ثابت الصدق هو ثابت التناقض أو الكذب. وهذا معناه صدق التكافؤين التاليين:

$$" V \leftrightarrow \sim \Lambda ",$$

$$" \Lambda \leftrightarrow \sim V ".$$

جـ- **فى المجموعة الثالثة** من الثوابت نجد معظمها، وهى تتميز بأنها تربط بين قضيتين يقع الثابت بينهما، وقد يربط الثابت من هذه المجموعة بين صيغتين، باعتبارهما متغيرين، وقد يربط بين متغير، وصيغة.

هناك أولاً ثابت **الوصل** conjunction ، ونرمز له بالرمز " & " ، وهو يعنى قولنا بطرفيه فى نفس الوقت. ويقابل ثابت الوصل فى اللغة

العربية بشكل عام حرف «و»، عندما يصل بين جملتين. وهناك أيضاً كلمات مثل «ولكن»، و «غيرأن»، والعديد من الألفاظ التى تدل على إثبات قضيتين مختلفتين فى نفس الوقت. والأمثلة التالية كلها ذات صورة منطقية واحدة هى الوصل:

- الجو صحو والشمس ساطعة.
- محمود طالب مجتهد، وكذلك أخوه.
- ذهبت لمقابلة المحامى، لكنه كان مشغولاً.
- فقدت الساعة الجديدة التى أهداها لى والدى الشهر الماضى.
- صادفت صديقاً قديماً أثناء سيرى فى ميدان التحرير بالأمس.

لا شك أن الجمل المركبة السابقة تعبر عن قضايا مختلفة من حيث الصورة اللغوية، ومن حيث معنى الارتباط بين طرفيها . أما من الزاوية المنطقية فإنها جميعاً على الصورة:

'P & Q'

ولتوضيح الأمر بالنسبة للقضية الثانية نجد أننا إذا أعدنا صياغتها بحيث تكون «محمود طالب مجتهد، وأخو محمود طالب مجتهد» يظهر لنا بجلاء أن الثابت المنطقى هو الوصل. وبالنسبة للقضية التى تليها نلاحظ أن الرابطة اللغوية هى «ولكن»، وهى تعنى أكثر من مجرد الوصل، فهى قد تعنى مثلاً أننى عند ذهابى لمقابلة المحامى كنت أتوقع أو أتمنى أن يكون موجوداً فى مكتبه، وقادراً على استقبالى، ولكنى وجدته بالفعل مشغولاً. إن ما يعنينا هو أن الرابطة تثبت من الناحية المنطقية طرفين هما أننى ذهبت بالفعل لمقابلة المحامى، وأن المحامى كان مشغولاً.

وبالنسبة للمثال الرابع نجد أن الأمر يحتاج إلى إدراك أن كلمة «التى» الواردة فى القضية، وهى أحد الأسماء الموصولة، تعمل عمل ثابت الوصل من حيث المعنى عل الأقل. وبشئ من الإمعان ندرك أن القضية بكاملها تعنى:

«أهدانى والدى ساعة جديدة الشهر الماضى، وفقدت هذه الساعة» وهنا يتضح أن الأسماء الموصولة قد تعمل عمل الثوابت المنطقية دون إخلال بالإختلاف فى المعنى بينها وبين غيرها من الألفاظ والأدوات اللغوية، والذى يعنينا فى مجال آخر غير مجال المنطق. ولسنا بحاجة الآن إلى شرح الكيفية التى يمكن بها تفسير انطباق نفس الصورة المنطقية على المثال الأخير، سوى بالتأكيد على أن كلمة «أثناء» تقوم بعمل ثابت الوصل، وأن العبارة التى تليها يمكن أن تعاد صياغتها كقضية مثل : «سرت فى ميدان التحرير بالأمس» ولا ينفى هذا أننا أيضاً نفقد بعضاً من المضمون الذى تحتويه الجملة الأصلية، وهو الرابطة «أثناء» تؤكد أن طرفى الوصل حدثا فى نفس الوقت، وهذا ما لا نستطيع ولا نحتاج إلى أن ننقله إلى الصورة المنطقية للجملة، مادمنا فى إطار حساب القضايا فقط.

ولا نزال قادرين حتى الآن على تفسير هذه الإختلافات الجزئية، على أساس أن بعض الألفاظ تضيف مضمونا زائدا إلى معنى الوصل، ولا تختلف عنه. وهذا يؤكد ما ذهبنا إليه من أن الصورة المنطقية لجمل اللغة وعباراتها تؤكد على الحد الأدنى المنطقى المشترك بين الجمل ذات الصورة الواحدة. غير أننا نلاحظ، مع ستروصن (١)، أمثلة أخرى لجمل تستخدم فيها

(1) Strawson, P. (1952), pp. 80 - 81.

عبارات لغوية مثل التى أشرنا إليها، ولكنها لا يعتبر وصلاً، منها ما يلى:

- محمد وأحمد طالبان بالجامعة.
- محمد وأحمد صديقان حميمان.
- ابتلت أرض الملعب، فسقط المطر.

إن ستروصن يتحفظ على الجملة الأولى بسبب الجملة الثانية التى تشاركها إلى حد كبير فى الصورة اللغوية. صحيح أنه لا مشكلة فى اعتبار الجملة الأولى متكافئة مع «محمد طالب بالجامعة وأحمد طالب بالجامعة»، ولكن المشكلة تظهر فى أنه إذا قبلناها لزم أن نعتبر الجملة الثانية على نفس الصورة، أى أن شيئاً مثل «محمد صديق حميم وأحمد صديق حميم» يصبح الصورة القابلة للترجمة للصيغة الوصلية. ولكن هذا ليس بالضبط ما تعنيه الجملة، فهى تعنى أن محمد وأحمد صديقان «لبعضهما»، وهذا ما لا نجده فى الجملة الثانية.

أما الجملة الثالثة فهى معكوس غير مقبول للجملة المفهومة والمقبولة التالية:-

«سقط المطر فابتلت أرض الملعب»

وكما سنعرف حين ندرس دلالة الثوابت المنطقية وسلوكها الاشتقاقى فى الفصول التالية فإن افتراض أن الجملة التى بين أيدينا مطابقة تماماً للصورة الوصلية التى نتحدث عنها، يلزم عنه أن الجملة الثالثة فى قائمتنا يجب أن تكون مكافئة لها. وهذا بالطبع افتراض غير مقبول. وسبب عدم قبولنا لهذا الأمر هو أن الفاء تدل عادة على التعاقب الزمنى بين طرفى الوصل. أى أن ترتيبا زمنيا نلتزم به، فإذا عكسنا وضع الطرفين كان الناتج

جملة كاذبة.

وبالرغم من أن هذه الأمثلة، وغيرها، يمكن أن يهز الثقة فى العلاقة بين ثابت الوصل، والألفاظ اللغوية التى أشرنا إليها، إلا أنه ينبغى التأكيد على أن العلاقة ليست علاقة تطابق، وإنما هى علاقة اشتراك فى جزء من المعنى، بحيث يمثل الوصل الحد الأدنى من المعنى المشترك بين كافة الأمثلة التى تحتوى فى إستخدامات مختلفة على كلمات مثل «و»، و «مع ذلك»، و«غير أن»، و «أثناء»، و «ثم»، وغيرها.

وفى هذا الإطار يمكن النظر مثلاً إلى الجملة الثالثة فى ضوء أن ما يمكن تغيير مكان طرفيه يكون هو ثابت الوصل " & " ، وليس الرابطة اللغوية «ف». ومعنى ذلك أنه بالرغم من كذب الجملة المشار إليها، فإن الجملة التالية صادقة:

«ابتلت أرض الملعب» & «سقط المطر».

بناء على صدق الجملة الأصلية صحيحة المعنى وهى:

«سقط المطر فابتلت أرض الملعب»

هذا مع التسليم بأن جزءاً هاماً من المعنى يتم فقده فى هذه العملية، وإن كان هذا الجزء غير ذى بال بالنسبة للنظرية المنطقية التى ننقل الجملة المكتوبة باللغة العربية إلى لغتها، وهى نظرية حساب القضايا.

أما الثابت التالى فهو **الفصل** disjunction ، ونرمز إليه فى نسقنا الحالى بالرمز " V " ، وهو يرتبط أساساً بكلمة «أو» فى اللغة العربية. ونحن نستخدم ثابت الفصل للدلالة على إثبات أحد طرفى الصيغة المركبة "P v Q" ، على الأقل، أى دون استبعاد اجتماع الطرفين، ولهذا يعرف

بالفصل الضعيف (١). غير أن هناك نوعاً آخر من الفصل نستبعد فيه اجتماع الطرفين فضلاً عن استبعاد كذبهما معاً، أى أننا نثبت أحد طرفى الفصل فقط، ويسمى هذا النوع بالفصل القوى (أو الاستبعادى) (٢)، وهو المعروف بنسبته إلى أصحاب المنطق الرواقى (٣). أما الأنساق الحديثة فتفضل الأخذ بالفصل الضعيف لبساطته، وضعف شروط صدقه، وصلته المباشرة بثابت التضمن الذى سنتوقف عنده بعد قليل.

ونتناول الآن بعض الأمثلة المستقاة من اللغة الطبيعية لتوضيح استخدام الصيغة الفصلية فى المواقف اليومية المألوفة، وعلاقة ذلك، قرباً أو بعداً، بالمعنى الإصطلاحى للرمز " V " :

- إما أن يسافر علي أو أن يسافر مصطفى.
- إما أن يفوز الأهلى فى المباراة القادمة أو يخسر الدورى.
- أحدهما سيدفع الحساب.
- سأشعر بخيبة الأمل إذا لم أحصل على هذه الوظيفة.
- يدفع الطالب الرسوم الدراسية اليوم وإلا يحرم من دخول الإمتحان.

المثال الأول مباشر إلى حد كبير، فالرابطة اللغوية «إما ..... أو .....» تعنى مباشرة المقابل فى اللغة العربية لثابت الفصل فى هذا السياق على الأقل. ففى أغلب الأحيان لا يفاجأ قائل عبارة من هذا النوع إذا ما وجد أن عليا ومحمداً قد سافرا الى المكان المقصود، ذلك أن عبارته تتوقع سفر

---

(1) Weak (Non - Exclusive) Disjunction.

(2) Strong (Exclusive) Disjunction.

(٣) راجع رسالتنا للماجستير (١٩٨٢)، الفصل الثانى.

أحدهما على الأقل ولا تمنع سفرهما الى نفس المكان. وتكذب العبارة فى حالة وحيدة وهى ألا يسافر أى منهما.

غير أن هذا الفهم لا ينسحب بتمامه على المثال الثانى الذى نعبر فيه عن علاقة فصل استبعادى بين فوز الأهلى فى مباراته القادمة وخسارته بطولة الدورى. ولذلك فقائل الجملة الثانية يضيف (ضمنا)، أو نفترض معه ضمناً أنه ليس صحيحاً إجتماع الطرفين معا. وبهذا إذا كانت الصورة المنطقية للمثال الأول هى "P v Q"

فالصورة المنطقية للمثال الثانى ستكون:

"(P v Q) & ~ (P & Q) "

والمعنى أنه إما أن تصدق الأولى أو (الفصل الضعيف) الثانية فضلا عن (الوصل) عدم صدق (النفى) وصل الطرفين.

أما المثال الثالث فلا يحتوى على الرابطة «إما ..... أو .....» ولكننا نلجأ إلى فهمنا للجملة حتى نستشف الصورة المنطقية لها. نحن أمام شخصين تناولا شيئاً على سبيل المثال فى أحد المحال وينتظر صاحبه قيمة ما تناولاه. فربما يقول لنفسه الجملة المقصودة، وهو يعنى فى هذه الحالة: إما أن يدفع الشخص الأول الحساب أو أن يدفعه الشخص الثانى ولهذا فالجملة لها نفس الصورة المنطقية الفصلية. غير أن أمانة الرجل تلزمه بألا يقبل الحساب من كل منهما على انفراد !!

أما المثال الرابع فالظاهر فيه عدم وجود رابطة فصلية، بل شرطية نستخدم فى مقابلها ثابت التضمن الذى سنتوقف عنده بعد سطور قليلة، ولكننا نستطيع أن نقول إن فهمنا للجملة يمكن أن يكون على النحو التالى:

«إما أن أحصل على هذه الوظيفة أو أشعر بخيبة الأمل»

ولعلنا نتفق على أن هذا الفهم ربما يكون أقرب إلى الحقيقة قليلاً من الصورة التالية.

«إما أن أشعر بخيبة الأمل أو أحصل على هذه الوظيفة»

ولكنهما فى لغتنا المنطقية صياغتان متكافئتان، وهذا يرجع بالدرجة الأولى الى تكافؤ الصيغتين التاليتين:

"P v Q" و "Q v P" (١)

أما المثال الخامس فالملاحظ أن السياق الذى تستخدم فيه الجملة يلعب دوراً فى تحديد الصورة المنطقية. والمقصود هنا أنه إذا كنا أمام تقرير محايد للجملة فالمسألة تنحصر فى تفسير كلمة «وإلا» بمعنى «أو»، والخطوة التالية هى اعتبار العلاقة بين دفع الرسوم الدراسية فى اليوم المقصود والحرمان من دخول الامتحان علاقة فصل استبعادى (غالبا). والسبب فى هذا ليس أن قائل العبارة يقصد استبعاد اجتماع طرفى الفصل، ولكن السبب ربما أنهما تعبران عن قضيتين استبعاديتين، بمعنى أن القضيتين يمتنع صدقهما معها، من حيث علاقتهما بالواقع، وليس من حيث الصورة المنطقية للجملة. وربما يختلف الأمر إذا كان قائل الجملة هو المسئول المختص حين يقرر هذا أمام الطالب أو ولى أمره. وفى هذه الحالة ربما تعبر الصورة الشرطية بصورة أفضل عن الموقف أو السياق الذى تستخدم فيه

---

(١) لابد أن نكون قد لاحظنا اختفاء ما يدل على نفى الطرف الثانى "Q" من الصورة المنطقية مع تحويل الصيغة من تضمن (أو شرط) إلى فصل. هذا أمر سيتضح سببه فى الفصول التالية عندما يكون ممكنا دراسة العلاقات الدلالية بين الثوابت المنطقية.

الجملة. وإن كان هذا لا يستبعد تكافؤ الصورتين.

وبيت القصيد فى الأمثلة السابقة هو بيان افتراق ما فى المعنى بين الروابط اللغوية المعبرة عن الفصل، وبين علاقة الفصل كما يستخدمها المناطقة. وإن كان هذا الافتراق لا يلغى الاتفاق فى حد أدنى دلالى معين. هذا ومن ناحية أخرى، هناك مسألة السياق الذى تستخدم فيه اللغة وأثره فى تحديد الصورة المنطقية لعبارات تلك اللغة وجملها. وهذا مبحث اهتم به الكثير من الفلاسفة فى منتصف القرن العشرين على النحو الذى سنعود إليه بشئ من التفصيل فى الصفحات التالية.

ننتقل الآن إلى أهم الثوابت المنطقية فى نسقنا، بل فى الأنساق المنطقية الصورية على إطلاقها. هذا الثابت هو المعروف **بالتضمن** Implication ، وأحيانا يسمى الشرط conditional . ويستخدم بعض الباحثين المصطلحين معاً للدلالة على مفهومين مختلفين من العلاقة المنطقية التى تقوم بين طرفين يسمى الطرف الأول فى هذه العلاقة بالمقدم antecedent ، والطرف الثانى نسميه بالتالى consequent وسنستخدم فى لغتنا المنطقية رمز السهم " → " المتجه من اليسار إلى اليمين للدلالة على التضمن الذى يتجه من الطرف الأيسر إلى الأيمن. فإذا أردنا أن نقول إن القضية "P" تتضمن القضية "Q" (١) نكتبها على النحو التالى:

" P → Q "

---

(١) هناك خلاف بين الباحثين حول ترجمة المصطلح Implication إلى اللغة العربية. غالبية الباحثين يرى أن الترجمة الصحيحة هى لفظ «اللزوم»، ومن القائلين بهذا الرأى الأساتذة: دكتور زكى نجيب محمود، ودكتور عبد الحميد صبره، ود. عزمى اسلام، ود. محمد مهران وغيرهم. =

وجدير بالذكر أن وضع طرفى علاقة التضمن يلعب دوراً مهما فى تحديد معنى المركب. ومعنى هذا أن "P → Q" تختلف عن" P → Q". وسنرى بعد ذلك كيف أن صدق أو كذب إحداهما مستقل (جزئيا) عن صدق أو كذب الأخرى. ولكن الذى يعنينا هنا فقط أنهما قضيتان مركبتان مختلفتان. أما المركب الوصلى أو الفصلى فلا يختلفان من حيث الصدق أو الكذب مع تغيير ترتيب طرفيهما. ومعنى ذلك أن الصيغتين : "P v Q"، و"Q v P"متكافئتان. وكذلك بالنسبة للصيغتين "P & Q" و"Q & P". وبرغم وضوح هذين التكافؤين، إلا أننا لا نفترضهما بداية، بل الواقع أن آليات النسق المنطقى تمكننا من أن نبرهن على صحتهما.(١)

ولعل أقرب شئ فى اللغة العربية من ثابت التضمن هو أدوات الشرط المختلفة. غير أن هذه العلاقة أبعد ما تكون عن التطابق، لدرجة أنه يمكننا القول باطمئنان أن أبعد الثوابت المنطقية من حيث المعنى عن نظيره فى اللغة الطبيعية هو ثابت التضمن. ويصعب تحديد طبيعة العلاقة بين التضمن وأدوات الشرط دون تعريف التضمن وبيان شروط صدقه من ناحية، وبيان

= وهناك رأى آخر يقول بترجمة المصطلح بكلمة «التضمن» والمنادون به أقلية تضم على رأسها الأستاذ الدكتور محمود زيدان، ود. ماهر عبد القادر، وكان صاحب هذه الدراسة ضمن الفريق الاخير وبخاصة فى بحثه لنيل الماجستير (١٩٨٣). غير أنه استناداً الى تمييز بداياته تقع أيضا فى نفس الرسالة المشار إليها، وأكدته دراسات غربية حديثة بين المصطلحين "Implication"و"Entailment"، يرى الباحث أن المصطلح الأول يترجم بالتضمن، والثانى يترجم باللزوم. بل أننا فى البحث الحالى نلمس تمييزاً آخر بين نوعين من اللزوم: الأول هو اللزوم الدلالى الذى سندرسه فى الباب الثانى، والثانى هو اللزوم التركيبى أو الإشتقاقى الذى نخصص له الباب الثالث. وربما يكون فى هذا الإقتراح المتواضع ما يحسم هذا الخلاف الهام.

(١) ونحن فى المنطق لانفترض إطلاقاً ما نستطيع أن نبرهن عليه.

استخدامات أسلوب الشرط فى اللغة العربية من ناحية أخرى (١). ولنأخذ بعض الأمثلة من الاستخدام اليومى لهذا الأسلوب لنرى مدى الاتفاق والاختلاف مع ثابت التضمن بالمعنى الاصطلاحى.

- إذا نجح سامى فى الامتحان انتقل إلى الفرقة الرابعة.
- لولا إصابة حارس المرمى لفاز الفريق بالمباراة بسهولة.
- إذا سقط المطر بغزارة هذا المساء لن أخرج من المنزل.
- سيحصل الباحث على منحة دراسية فقط إذا تعلم اللغة الألمانية.
- سأصافح هذا الشخص على شرط أن يعتذر عن خطئه.
- لو كنت أمريكيا لأعطت صوتى لصالح كلينتون.
- إذا ارتفعت درجة حرارة الماء إلى ١٠٠° مئوية فإنه يغلى.

قبل أن نشرع فى تحليل الأمثلة السابقة نستبق القول فيما يتعلق بشروط صدق ثابت التضمن الذى سيأتى بيانه فى الفصل الأول من الباب الثانى. يصدق ثابت التضمن إذا صدق تالى المركب أو إذا كذب المقدم، ويكذب فى حالة صدق المقدم وكذب التالى معاً. معنى ذلك أن توفر شرط الصدق أو الكذب يكفى لاكتشاف قيمة صدق المركب التضمنى.

أما بالنسبة للشرط فى اللغات الطبيعية، فنحن نلاحظ مع ستروصن(٢)

---

(١) ننبه هنا إلى أننا لا ننوى أن نقارن تفصيلا بين معنى ثابت التضمن، وأسلوب الشرط من حيث نحو اللغة العربية، وإنما ينصرف اهتمامنا أساساً إلى أشهر أمثلة استخدام هذا الأسلوب. وتمتلئ الدراسات الغربية بمقارنات مماثلة بين الثوابت عموماً، وثابت التضمن خصوصاً مع نظائره فى اللغات الأوربية، ومنها كتابى كواين (١٩٤٠)، و (١٩٥٠)، ودراسة ستروصن الهامة (١٩٥٢)، والتى نحيل إليها فى مواضع عديدة من هذا الفصل بالتحديد.

(2) Strawson, P. (1952), pp. 82 - ff.

أن الإستخدام الشائع لهذا الأسلوب لا يتطابق مع هذا التعريف. فنحن عادة لا نصف القضايا الشرطية بالصدق، ربما نصفها مثلاً بأنها معقولة أو مقبولة، ولكن الوصف بالصدق أو الكذب لا يأتى مرتبطا بهذه القضية كأمر مألوف. وحتى إذا تجاوزنا عن هذا الاختلاف سنجد أن الصورة المنطقية للقضية، والتى تتمثل فى التضمن، قد تكون صادقة بمعيار شروط الصدق الذى حددناه، ومع ذلك يصعب وصف الجملة الطبيعية الشرطية بهذا الوصف. أما إذا صدقت الجملة الشرطية فلا خلاف فى أن التضمن المناظر سيكون صادقاً. الخلاصة أن التضمن يلزم عن الششرط المناظر ولكن العكس ليس ضرورياً أن يحدث (١).

ننتقل الآن إلى فحص مجموعة الأمثلة التى قدمناها تواً. الجملة الأولى تستخدم عادة بواسطة شخص لا يعلم على الأرجح ما إذا كان سامى قد نجح أم لا، ومن ثم لا يعلم بانتقاله أو عدم إنتقاله إلى الفرقة الرابعة. وما يقصده قائل العبارة حينئذ هو أنه لا يصح (لايصدق) أن يجتمع نجاح سامى فى الإمتحان مع عدم انتقاله إلى الفرقة الرابعة. فإذا حدث أن صدق مقدم الشرط وكذب تاليه اعتبر قائل الجملة والمستمع إليها أن المركب الشرطى كاذب لا محالة.

والآن نسأل: ماذا لو بدأنا من الصورة المنطقية للجملة؟ إن الصورة المنطقية هى التصمن بالتأكيد، أى الصيغة المركبة: " $P \rightarrow Q$ "

نحن نعلم أنه بمجرد صدق " Q " يصبح المركب التضمنى صادقاً: هل إذا صدق أن سامى انتقل إلى الفرقة الرابعة يكون معنى هذا صدق

(1) Ibid, P. 84.

المركب الشرطي؟ ربما، ولكن الأوضح من هذا هو موقف المركب حين يكذب مقدم الشرط أي أن لا ينجح سامي في الامتحان بالنسبة للتضمن نجد أنه يصدق في حالة كذب المقدم بصرف النظر عن حالة التالي من حيث الصدق أو الكذب. أما الشرط فأبعد ما يكون عن هذا الاستخدام، وخاصة إذا صدق انتقال سامي إلى الفرقة الرابعة (بطريقة غير مشروعة مثلا !!)

وهكذا نتفق على أنه إذا ثبت لدينا صدق الجملة الشرطية صدق التضمن المناظر لها، أما العكس فليس صحيحاً على الدوام، أي أن صدق التضمن شرط ضروري لصدق الجملة الشرطية المناظرة للمركب التضمني، ولكنه ليس شرطاً كافياً.

أما الجملة المركبة الثانية فيستخدم فيها الرابطة «لولا»، وهي تعني عادة حدوث الطرف الأول، أي إصابة حارس المرمى، وعدم حدوث الطرف الثاني، أي عدم فوز الفريق بالمباراة وتقول الجملة في هذه الحالة إنه إذا (لو كان قد) حدث نفي الطرف الأول حدث الطرف الثاني. ومن هنا تكون الصورة المنطقية للجملة على النحو التالي:

$$\sim P \rightarrow Q$$

فإذا قبلنا القاعدة التي تحدثنا عنها تواً يصعب بشكل واضح تصور شروط صدق أو كذب الصيغة الشرطية التي تحتوي على مقدم كاذب، وإن لم يكن الأمر على نفس درجة الصعوبة بالنسبة للصيغة المنطقية. ذلك أن شروط صدق الأخيرة هي تعبير عن تعريفها الذي استبقنا القول بتقديمه في بداية حديثنا عن ثابت التضمن.

ويشترك المثال السادس. مع المثال الثاني في أن مقدم الشرط معروف

مقدماً أنه غير صادق، والفرق بينهما أن الرابطة فى المثال الثانى رابطة امتناع لوجود وفى المثال السادس رابطة امتناع لامتناع. وبسبب معرفتنا بالكذب الواقعى للمقدم فى الحالتين يسمى فى هذه الحالة بالشرط المخالف للواقع contrafactual conditional . ولا شك أن هناك مبحثاً هاماً فى المنطق الفلسفى المعاصر يهتم بهذه القضية بشكل تفصيلى (١).

أما الذى يعنينا فى السياق الحالى فهو أن الصورة المنطقية للجملة الشرطية السادسة لا تحتوى على النفى، أى أنها تشبه الصورة المنطقية للجملة الأولى، وهى:

$$“ P \rightarrow Q ”$$

بحيث تشير "P" فى حالتنا هذه إلى «أكون أمريكيا»، وتشير "Q" إلى «أعطى صوتى لصالح كليتنون». وبالنسبة لشروط صدق المركب التضمنى لا نلتفت عادة إلى الصدق الواقعى للقضايا التى جردنا الصورة التضمنية منها، لأن هذه الصورة تمثل حداً أدنى مشترك بينها وبين قضايا أخرى كثيرة.

وبالنسبة للمثالين الرابع والخامس فالأوفق أن نترجمهما إلى الصيغة الشرطية كما تتجلى فى المثال الأول (٢) كمرحلة أولى، ثم بعد ذلك يسهل

(١) هناك العشرات من الدراسات الهامة التى تتناول هذا الموضوع وتطبيقاته المتنوعة، راجع على سبيل المثال:

- Lewis, D. (1973): Counterfactuals, Blackwell, Oxford.
- Sainsbury, M. (1991): Logical Forms, Basil Blackwell.

(٢) يتوسع لامبرت وأولريك فى تطبيق هذا الأسلوب للوصول إلى الصورة المنطقية للغة، فيقوم بترجمة الجمل المركبة فى اللغة اليومية إلى صياغات قياسية فى اللغة الطبيعية كمرحلة وسطى بينها وبين الصورة المنطقية التى يستخدم فيها مفردات اللغة المنطقية فقط. راجع فى هذا الصدد.
Lambert, K., & Olrich (1980).

استخراج الصورة المنطقية للقضايا المركبة فى كل حالة. والرابطة اللغوية فى المثال الرابع هى «فقط إذا»، وهى تقابل "only if" فى اللغة الانجليزية، وهى تستخدم عادة للدلالة على تضمن أو شرط معكوس، بمعنى أن الجملة التى تأتى بعدها مباشرة هى التالى، والأخرى هى المقدم، ولهذا فالصورة القياسية للجملة تكون على النحو التالى:

«إذا تعلم الباحث اللغة الألمانية حصل على منحة دراسية».

أما الجملة الخامسة فالرابطة فيها هى «على شرط»، وهى تقوم بعمل «إذا» تماماً، ولذلك فما يأتى بعدها هو مقدم الشرط، والقضية الأخرى هى التالى، ومن هنا تكون الصورة القياسية لها هى:

«إذا اعتذر هذا الشخص عن خطئه سأصافحه»

والآن نقول كلمة عن المثال رقم (٣) الذى أجلنا تناوله متعمدين. فالجملة تأخذ فى الظاهر من حيث التركيب اللغوى الصورة الشرطية، ولكن إذا ركزنا بصورة أكبر على السياق الذى تستخدم فيه نجد أننا لا نقصد بها عادة تقديم شرط بالمعنى الحرفى. إن قائل الجملة فى الواقع يعلن عزمه على عدم مغادرة المنزل إذا سقط المطر بغزارة. فإذا حدث سقوط المطر الذى تحدث عنه وغادر المنزل لن نصف الجملة بالكذب، وإنما سنقول إنه غير رأيه فى اللحظة الأخيرة مثلاً، أو شيئاً من هذا القبيل. المهم أن الجملة من حيث الاستخدام المألوف لا تعبر عن مركب شرطى بالمعنى الذى حددناه فى السطور السابقة.

ويشبه هذا الموقف من زاوية معينة قولنا لشخص معين «إذا سمحت استعير قلمك الأنيق هذا بضع دقائق». الجملة تأخذ الصورة الشرطية فى

الظاهر فقط، ولكن استخدمها فى الواقع اليومى العادى لا يقصد به التعبير عن شئ ذى صلة بالمركب التضمنى الذى ندرسه، إنها تعبرعن أسلوب طلبى مهذب. و هذا يوضح لنا المسافة التى تتسع أحياناً بين الصورة اللغوية أو النحوية والصورة المنطقية للغة .

ويؤكد المثال السابع فى القائمة التى أوردناها منذ قليل صحة الملاحظة الأخيرة حين تتخذ الجملة الصورة الشرطية من حيث التركيب النحوى، أما الصورة المنطقية فهى المعروفة فى التراث المنطقى باسم التضمن الصورى Formal Implication ، والدراسة المنطقية لهذا النوع من القضايا تخرج عن اهتمامنا فى هذا الكتاب. يكفى فقط أن نذكر أن القضية تنتمى إلى نظرية الأسوار(١) .

يتبقى ثابت أخير وهو المعروف **بالتكافؤ Equivalence**، أو التضمن المتبادل أى التضمن من الطرف الأول إلى الثانى ومن الثانى إلى الأول . ونرمز إلى التكافؤ بالرمز " ↔ "، وواضح علاقة الرمز بثابت التضمن، كذا علاقة الثابت التكافؤى بالتضمن من حيث المعنى .

أما من حيث العلاقة بين الثابت والروابط اللغوية المعروفة فى اللغة العربية فلا نجد أداة محددة تعطى هذا المعنى أو شيئاً قريباً منه. وفى اللغة الإنجليزية توجد العبارة " If and only if " ، ونترجمها عادة إلى "إذا

---

(١) فى الفصلين الرابع والخامس من رسالتنا للماجستير، عالجنا موضوع التضمن الصورى فى إطار دراستنا لنظرية المنطق عند رسل . أما بالنسبة للسياق الحالى فالباحث بصدد إعداد دراسة موسعة حول المنطق العام General Logic مقارنا بالمنطق الأولى Primary Logic الذى تتناوله الدراسة الحالية .

وفقط إذا" على اعتبار أن "إذا" تفيد الشرط من الجملة التى تلى العبارة مباشرة إلى الأخرى، أما "فقط إذا" فتعنى أن ما يليها هو جواب لشرط أخر مقدمه هو تالى الشرط الأول، وقد طرحنا مثالاً للدلالة على هذا الجزء بالتحديد أثناء حديثنا عن التضمن .

المهم فى الأمر أننا إذا صادفنا جملة مركبة يتم فيها الربط بين جملتين بحيث يفيد المعنى أن إحداهما شرط للأخرى، والعكس كذلك، كانت الصورة المنطقية للمركب هى التكافؤ، وكانت العلاقة بين الجملة اللغوية والصورة التكافؤية غير بعيدة عن العلاقة بين نماذج الشرط فى اللغة العربية والصورة المنطقية التضمنية وبعبارة أخرى، إذا عبرت الجملة عن الشرط الضرورى Necessary Condition لما تعبر عنه جملة أخرى كانت الثانية تتضمن الأولى. فإذا كانت شرطاً كافياً Sufficient Condition للثانية كان اتجاه التضمن عكسياً ، أى من الأولى للثانية، وبهذا فوصل الشرطين، الضرورةوالكفاية ، هو التكافؤ .

وقبل أن ننهى الحديث عن الثوابت المنطقية نذكر أنه قد يتبادر إلى الذهن أن المجموعة التى تناولناها فى الصفحات السابقة بالتحليل لا تمثل كل ما نحتاجه من الثوابت فهناك ولا شك ثوابت أخرى، أو على الأقل توجد علاقات يمكن أن تنشأ بين المتغيرات ولم نحدد لها ثابتاً أو ثوابت معينة. ولكن ما سنصل إليه فى الباب الثانى من الدراسة هو أن قائمة الثوابت كافية تماماً، بل إنها فى الواقع أكثر مما نحتاج . ولكن هذه قضية أخرى نؤجلها إلى حينها .

٢ - قواعد التركيب Formation Rules

عالجنا فى الصفحات السابقة مفردات اللغة المنطقية من متغيرات وثوابت. المتغيرات تقوم مقام الوحدات الأساسية فى بناء لغة حساب القضايا ، والثوابت هى الروابط التى تؤلف بين مجموعة أو مجوعات من المتغيرات لبناء صيغ مركبة. الصيغة Formula عبارة عن مركب من ثوابت ومتغيرات تختلف فى عددها وطريقة ترتيبها بما ينعكس على معنى الصيغة. وهذا معناه أن من الممكن أن يكون لدينا صيغتان تتكونان من نفس المتغيرات بنفس عدد مرات وقوعها ونفس الثوابت ، ولكن المعنى مختلف تماماً . هذا ما سنواه بالتفصيل بعد قليل .

أما ما يعنينا هنا فهو التميز بين نوعين من الصيغ . النوع الأول هو الصيغ صحيحة التركيب Well formed formulae ، وهى الصيغ التى تخضع تماماً لقواعد التركيب الخاصة بحساب القضايا . أما الصيغ فاسدة التركيب Ill formed formulae فهى تلك التى تخرق قواعد التركيب مرة واحدة على الأقل يبقى قبل التفصيل فى هذا الأمر أن نحدد قواعد التركيب formation rules التى سنقيس عليهاالصيغ بغرض تحديد صحيحها من فاسدها. القواعد هى .

- كل متغير قائم بذاته يمثل صيغة صحيحة التركيب .
- ثابت الكذب " Λ " وثابت الصدق " V " كل منهما صيغة صحيحة التركيب قائمة بذاتها.
- كل صيغة صحيحة التركيب يسبقها ثابت النفى تكون صيغة جديدة صحيحة التركيب .

- كل صيغة عبارة عن وصل لصيغتين صحيحتى التركيب تمثل صيغة صحيحة التركيب .
- كل صيغة عبارة عن فصل بين صيغتين صحيحتى التركيب تمثل صيغة صحيحة التركيب .
- كل صيغة عبارة عن تضمن بين صيغتين صحيحتى التركيب تمثل صيغة صحيحة التركيب .
- كل صيغة عبارة عن تكافؤ بين صيغتين صحيحتى التركيب تمثل صيغة صحيحة التركيب .
- كل صيغة مركبة من أى من الصيغ السابقة عن طريق استخدام ثابت أو ثوابت منطقية وفق نفس القواعد السابقة مرة ومرات تشكل صيغة صحيحة التركيب ، وفيما عدا ذلك يعتبر فاسد التركيب (١).

هذه القواعد الثمانية تمثل الأساس فى تمييز الصيغ صحيحة التركيب عن الصيغ فاسدة التركيب، وهذا أمر أخطر بكثير مما قد نتصور بالنسبة للنظرية المنطقية. والواقع أن الصيغ فاسدة التركيب تستبعد بداية من أى بحث منطقى تالى سواء على المستوى الدلالى أو الإشتقاقى . إنهاتشبه الجمل التى لا معنى لها فى اللغات الطبيعية مثل :

"الشمس تحلم على من أنفه"

وهذه ليست جملاً فى الواقع، بل هى مجرد كلمات متراصة إلى جوار

---

(١) لاتخلو دراسة منطقية من ذكر قواعد التركيب الخاصة بالنسق المنطقى الذى تعرضه، و تختلف الدراسات بصورة طفيفة فى صياغتها للقواعد ، وإن جملت نفس المضمون . قارن مثلا مع:
Newton-Smith, W. (1985), P .79

بعضها بلا معنى على الإطلاق، وكذلك الحال فى المنطق ٠ إن أى صيغة تخالف القواعد الثمانية يصير حالها إلى ما يشبه (الجملة) السابقة وأمثالها.

نتوقف هنا قليلاً أمام القاعدة الثامنة، وهى التى تفتح الباب أمام تكوين مالا نهاية له من الصيغ بالغة التعقيد، وذلك عن طريق تكرار توظيف الثوابت مرات عديدة على الصيغ الناتجة. وتطرح الصيغ المركبة مشكلة تتعلق بضرورة التمييز بين مجال كل ثابت. ذلك أنه إذا تعددت الثوابت بصورة كبيرة كان لزاماً علينا تحديد الأطراف التى يربط بينها كل ثابت على حدة ٠ والقاعدة أن مجال كل ثابت يكبر مع تأخر دوره فى تركيب الصيغة ككل ٠ ويصغر إذا تم توظيفه مبكراً .

المهم أن ما يعنينا هنا هو البحث عن أسلوب لتحديد مجال الثوابت ٠ وقد اخترنا الأقواس كأداة ناجحة للقيام بهذا الدور. الأقواس ليست ثوابت ذات تعريف معين، وإنما هى تهدف إلى توضيح تركيب الصيغة وبنيتها، وهى تؤثر من هذا الباب على معنى الصيغة بحيث إذا اختلف مكان الأقواس اختلف معنى الصيغة تماماً ، بل ربما حولتها الأقواس إلى صيغة فاسدة التركيب ونحن نستخدم ثلاثة أنواع من الأقواس هكذا .

[{(   )}]

القوسان الخارجيان يعبران عن مجال أوسع عادة من القوسين الأوسطين اللذين يعبران بدورهما عن مجال أوسع من القوسين الداخليين، فإذا ورد أحد قوسين لابد أن يقابله الاخر قبل نهاية الصيغة من الجهة الأخرى، أى يجب أن يكون القوسان متقابلان، ويتوسطهما ثابت رئيسى

بين متغيرين أو صيغتين يغلف أحدهما أو كليهما قوسان من درجة أقل فى القوة من القوس الكبير بنفس القواعد التى أشرنا إليها .

ولكى يتضح أمامنا أهمية الأقواس نتخيل معاً حال الصيغ التالية دون وجودها :

1- {P v (Q&R)} → (P&R)

2 - [{R → (Q&P)} → S] v R

3 - Q → ~[~(P&R) v ~(Q v S)]

الصيغ الثلاثة صحيحة التركيب، ولعلنا نتفق على أنه بدون الأقواس يختلط الحابل بالنابل، ولا يصير للصيغة أى معنى، وتصبح فاسدة التركيب. القوسان الأوسطان مثلاً فى الصيغة الأولى يحددان مجال ثابت الفصل. فى الصيغة الثالثة الثابت الرئيسى هو التضمن الذى يقوم بين " Q" ونفى الصيغة التى يحتويها القوسان الكبيران والثابت الرئيسى داخل هذا القوس هو الفصل بين نفيين، وهكذا .

أما الصيغ التى لا تخالف أيا من القواعد التركيبية الثمانية فهى التى تعنينا فى النظرية المنطقية، ذلك أنها تمثل عناصر حساب المتتابعات Sequent Calculus الذى نخصص له هذه الدراسة بالكامل ، ويمكن لنا من الناحية الدلالية أن نبحث شروط صدق الصيغ الصحيحة التركيب مما يجعلنا نقول بتطابق مجموعة الصيغ صحيحة التركيب مع مجموعة الصيغ ذات المعنى، كما سنرى فى الفصول التالية. والآن نضرب بعض الأمثلة البسيطة لبيان كيفية تمييز الصيغ صحيحة التركيب عن غيرها

- P v (Q&R)

- $\sim Q \vee (P \& R)$
- $\sim\sim P \rightarrow Q$
- $\sim P \rightarrow \sim \& Q$

الصيغة الأولى صحيحة التركيب، ذلك أن ثابت الوصل داخل القوس يربط المتغيرين " Q" و " R" أما ثابت الفصل فيربط بين المركب الوصلى ومتغير آخر هو " P" الصيغة الثانية تشبه الأولى من حيث الصورة المنطقية العامة، وهى الفصل بين نفى " Q" والقوس الذى يمثل وصلاً بين " P"و " R" أما الصيغة الثالثة ففاسدة التركيب، فنحن لا نعرف مجال عمل ثابتى الفصل والوصل هل المقصود هو الصيغة الصحيحة : " Q v (P&R)" ، أو الصيغة الصحيحة أيضاً ؛ "(QvP) & R" أم صيغة أخرى . ولهذا نعتبر أن الصيغة الثالثة لا معنى لها (١).

الصيغة الرابعة تمثل علاقة تضمن بين نفى نفى " P" كمقدم والمتغير "Q " كتالى، ومن ثم يكون ثابت التضمن هو الثابت الرئيسى فى الصيغة الصحيحة .أما الصيغة الأخيرة فلا نستطيع أن نحدد ثابتاً رئيسياً فيها، كما أن ثابت الوصل لا يقع بين متغيرين أو صيغتين صحيحتى التركيب كما تقتضى القواعد التى حددناها آنفا ، ومن ثم تكون الصيغة الأخيرة فاسدة

---

(١) قد تقول بعض الأنساق بالصحة التركيبية للصيغة الثالثة على افتراض أن هناك تدرجاً فى القوة من بين الثوابت . الثابت الأقوى هو الذى نعتبره الثابت الرئيسى، وعادة ما يوضع التضمن ثم الفصل ثم الوصل بالترتب التنازلى من حيث القوة . ومن هنا تكون الصيغة صحيحة، وتفسيرها يتطابق مع الاحتمال الأول المشار إليه أعلاه ونقول هنا:إن الأمر مسألة اختيار بالنسبة للنسق وقواعده التى يوردها المنطقى فى بداية عمله هذا فضلاًعن أننا قد نحتاج الأقواس فى حالة ما إذا أردنا التعبير عن الاحتمال الثانى بالتحديد.

التركيب ولا شأن للمنطق بهامن قريب أو بعيد .

الأشجار التركيبية: Formation Trees

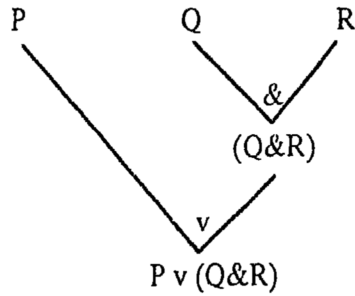
قد يكون من السهل التيقن من صحة أو فساد صيغة منطقية بالطريق المباشر إذا كانت صيغاً بسيطة مثل تلك السابقة، أما الصيغ الأكثر تركيباً وهى التى تحتوى على عدد أكبر من المتغيرات والثوابت والأقواس فتحتاج إلى خبرة منطقية معينة لكى نتمكن من قراءتها وفهمها. غير أن هناك طريقة أخرى لاختبار أى مجموعة من الرموز المنطقية والتى بموجبها نستطيع أكتشاف ما إذا كانت تكون فيما بينها صيغة صحيحة التركيب، أى أن يكون لها معنى داخل النظرية المنطقية أم لا، وهى ما يعرف بالشجرة التركيبية.

فالشجرة التركيبية، إذن، أسلوب توضيحى القصد منه بيان الكيفية التى تم بها الوصول من الوحدات الأساسية للغة المنطقية إلى الصيغ المركبة، وفق القواعد التى حددناها فى القسم السابق فإذا خضعت الصيغة لقواعد التركيب بشكل كامل كانت صحيحة التركيب، وإذا وجدنا موقعاً واحداً تخالف فيه هذه القواعد صرنا أمام صيغة فاسدة التركيب لا شأن للمنطق بها. ويفيدنا أسلوب الشجرة التركيبية فى بيان مدى خضوع الصيغة للقواعد المذكورة، ذلك أن لكل صيغة صحيحة شجرة تركيبية محددة تبدأ من المتغيرات فى القمة لتصل فى القاع الى الصيغة الكاملة.

وليس هذا هو الهدف النهائى من استخدام تكنيك الأشجار التركيبية،

ذلك أنها ليست سوى مرحلة على طريق الكشف عن البنية الداخلية للصيغ المنطقية مما سينعكس على المستوى الدلالى حين نتناول شروط كل منها، وكذلك حين نوظفها كعنصر من عناصر متتابعة منطقية معينة.

ولنأخذ على سبيل المثال الصيغة الأولى فى القسم السابق وهى Pv(Q& R)لكى نوضح الشجرة التركيبية لهذه الصيغة نبدأ من المتغيرات الواردة بها، ونضعها فى القمة، حتى وإن تكرر بعضها فيظهر بنفس عدد مرات تكراره. فى المرحلة التالية يتم تجميع المتغيرات فى صيغ مركبة تمثل وحدات أكبر من المتغيرات بالنسبة الى بناء الصيغة الكبرى، وفى حالة الصيغة التى بين أيدينا نجمع الوصل «Q & R» فقط. فى حالات أخرى نقوم بهذه العملية عدة مرات حتى نصل الى تشكيل الصيغة المطلوبة فى السطر الأخير من الشجرة التركيبية. وفى حالتنا البسيطة السابقة تكون الشجرة كما يلى:

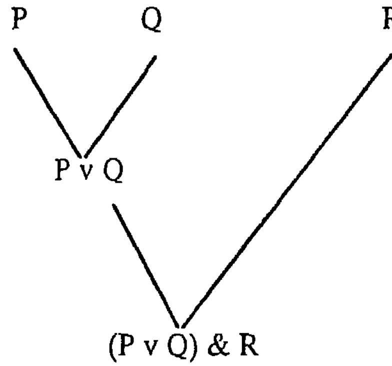


---

(١) نستعير فكرة الشجرة التركيبية أساساً من ولفرد هودجز فى دراسته الرائعة حول المنطق الحملى الأولى، ولكننا نتوسع فيها أكثر بكثير مما فعل هو. راجع فى هذا الصدد:

Hodges , W. : (1983)., pp . 8 - 9

الثابت الرئيسى فى الصيغة هو الفصل، ولذلك نصل إليه فى المرحلة الأخيرة من تركيب شجرة الصيغة. ولعل هذا يتضح أكثر حين نقارن هذه الشجرة بتلك الخاصة بالصيغة المختلفة قليلاً، وهى" (P v Q) & R "
والثابت الرئيسى هنا ليس الفصل، بل الوصل، ولذلك برغم أن المتغيرات هى، والثوابت هى، وحتى الأقواس إلا أن الشجرة التركيبية تختلف فى الحالة الثانية عنها فى الأولى، وهذا ما سنراه الآن:



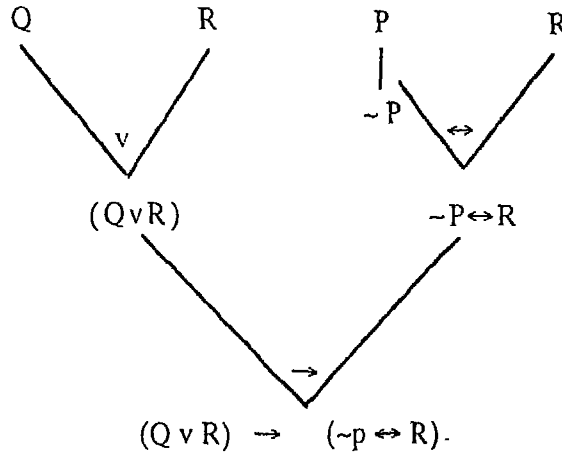
لعنا نكون قد لا حظنا الدور الذى تلعبه الأقواس فى تحديد مجال كل ثابت مما يعنى أنها تساعدنا فى تحديد الثابت الرئيسى للصيغة ككل. والآن ننتقل إلى مثال آخر أكثر تعقيداً من المثالين السابقين. الصيغة المطلوب تقديم الشجرة التركيبية الخاصة بهاهى:

$$(Q \vee R) \rightarrow (\sim P \leftrightarrow R)$$

الثابت الرئيسى فى الصيغة هو ثابت التضمن الذى يربط بين القوسين، ومن ثم تكون الخطوة الأخيرة فى تكوين الشجرة هى الربط بثابت التضمن بين القوسين على جانبيه. القوس الأول يأتى من الربط الفصلى بين

Hodges, w- (1983), pp -8- 9

"R" و"Q" والقوس الثانى من الربط التكافؤى بين "P" و "R" .ومن ثم علينا أن ننفى"P" أولاً. القاعدة كما نرى تقول إن الثابت كلما كان مجال تأثيره أكبر كلما تأخر تركيبه، وكلما كان تأثيره أصغر تقدم فى ترتيب تركيبه. والشجرة تكون كمايلى:

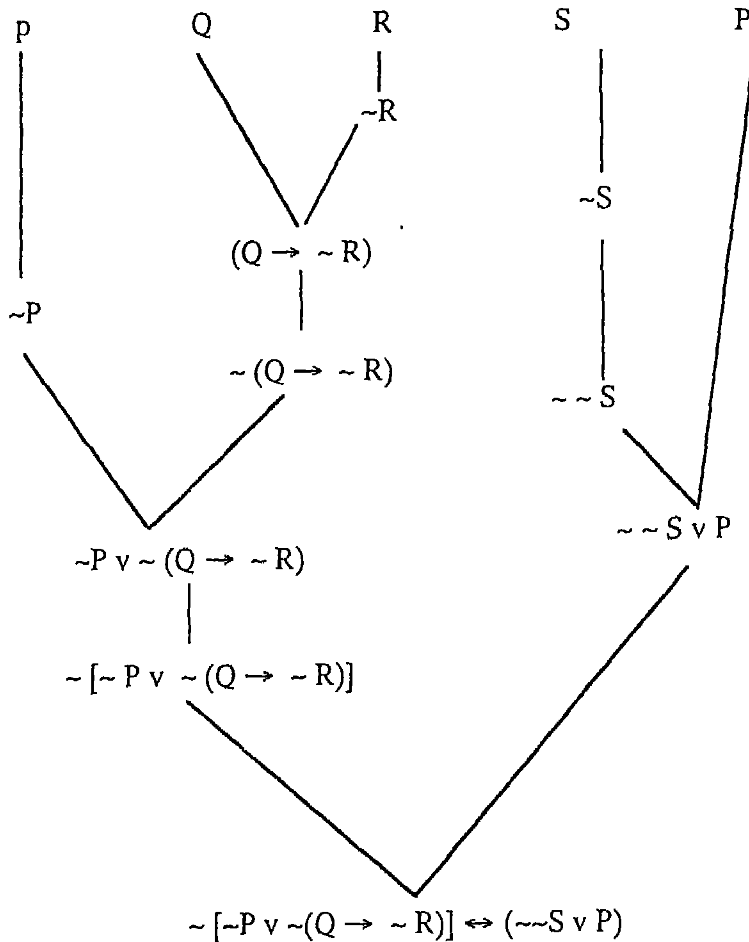


نعود للتأكيد على الطابع التوضيحى لأسلوب الشجرة التركيبية من حيث أنها تساعدنا فى الكشف عن البنية الداخلية للصيغة المنطقية موضع التحليل، هذا فضلاً عن فائدتها فى تحديد ترتيب خطوات تكوين قوائم الصدق الخاصة بكل صيغة، والذى سنتعرض له فيما بعد. وبتطبيق هذه القوائم على صيغة ننتقل فى التعامل معها من المستوى التركيبى إلى المستوى الدلالى كما سبق أن أشرنا.

والآن ننتقل إلى مثال آخر يتبين منه مدى فائدة أسلوب الشجرة التركيبية فى التعامل مع الصيغ شديدة التركيب، وبخاصة مع تشكيلات تضم ثابت النفى حين يقع خارج أو داخل الأقواس. وبمعنى آخر نستطيع قياس مجال كل ثابت وتأثيره داخل الصيغة الواحدة. الصيغة المطلوبة هى:

$$\sim [\sim P \vee \sim (Q \rightarrow \sim R)] \leftrightarrow (\sim\sim S \vee P)$$

لكى تكشف عن الشجرة التركيبية لهذه الصيغة نبدأ من اليسار إلى اليمين وكلما تقع أعيننا على متغير نضعه على السطر حتى وإن تكرر، وبعد ذلك نركب الصيغ الوسطى بالترتيب حتى نصل فى النهاية إلى الصيغة كلها وثابتها الرئيسى هو التكافؤ. الشجرة هى:



تكشف الشجرة التركيبية عن ترتيب العمليات المنطقية التى تتم لكى نصل فى النهاية إلى الصيغة المطلوبة، ومن ثم تكشف عن مجال كل ثابت بما لهذا من أهمية سبق إيضاحها. فالثابت الرئيسى هو التكافؤ، ولذلك نصل إلى توظيفه فى الخطوة الأخيرة، ومن ثم يظهر أسفل الشجرة. نلاحظ أيضاً أن مجال ثابت الفصل فى القوس الأكبر (الذى يقع إلى يسار ثابت التكافؤ) أكبر من مجال ثابت التضمن، ولذلك يتم تركيبه فى مرحلة لاحقة. يلاحظ أيضاً أن ثابت التكافؤ ينشىء علاقة بين أقوى ثابتين فى الطرفين اللذين يقع بينهما، وهما الفصل فى الطرف الأيمن، والنفى (نفى الفصل) فى الطرف الأيسر.

ومن البديهى أن يسأل سائل هنا، ماذا يحدث حين نفشل فى ملاحظة فساد صيغة ما من الناحية التركيبية، ومن ثم نحاول تركيب شجرة خاصة بها؟ قبل الإجابة عن هذا السؤال نلاحظ أن انتقالنا خطوة فى سبيل تكوين الشجرة يكون فى إحدى حالتين هما:-

أ- أن ننتقل من فرع واحد فقط سواء متغير أو صيغة إلى نفى المتغير أو الصيغة.

ب- أننا ننتقل من فرعين مختلفين لتكوين فرع واحد باستخدام ثابت الفصل أو الوصل أو التضمن أو التكافؤ، سواء كان الفرعان أو أحدهما من المتغيرات أو الصيغ.

ومع افتراض أننا نبدأ من متغيرات مطلقة لا يحق لنا سوى تطبيق إحدى هاتين الخطوتين بما يؤدى فى النهاية إلى الوصول إلى الصيغة المعينة. أما إذا لم يكن هذا ممكنا فى إحدى مراحل تكوين الشجرة تكون

الصيغة نفسها فاسدة التركيب، ولا توجد شجرة تركيبية لها، ومن ثم لا مكان لها فى نظرية المنطق. ولنأخذ الصيغة التالية على سبيل المثال:

$$P \rightarrow (Q \vee \sim \& \sim R)$$

نعلم سلفا أن الصيغة غير صحيحة، ولكن على افتراض أن أحداً لم يلاحظ موضع الوصل الذى لا يؤدى دوراً صحيحاً، سنجد أن تكوين الشجرة سيصطدم بهذا العائق على النحو التالى:

P	Q	R
|	|	|
?	?	~R
		|
		?

تشبه الصيغة إلى حد ما صيغة صحيحة ثابتها الرئيسى هو التضمن ولذلك نبقيه إلى المرحلة الأخيرة. نحاول تكوين القوس (R ~ &~ v Q) $(Q \vee \sim\& \ \sim R)$

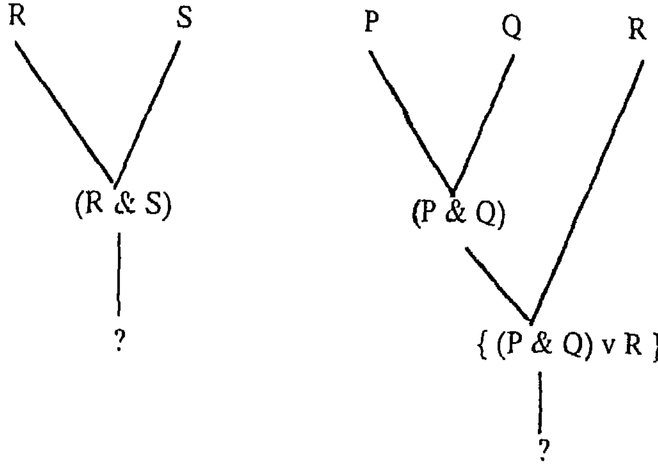
فلا نستطيع بسبب أن الوصل لا دور صحيح له، وليس هناك طرفين يربط بينهما، وهذا يوضح أن الشجرة لا يمكن اكمالها إطلاقاً. إننا كما نرى لا نستطيع أن نقوم سوى بخطوة واحدة فقط وهى نفى "R"، بعد ذلك لا نستطيع أن ندخل نفى "R" فى أى علاقة مع المتغيرات المجاورة لها.

لنأخذ مثالاً آخر لبيان كيف يستحيل تكوين شجرة تركيبية لصيغة فاسدة التركيب. الصيغة هى:

$$(R \& S) \sim \rightarrow \{(P \& Q) \vee R \}$$

سريعا ما نلاحظ التواجد الغريب لثابت النفى قبل ثابت التضمن وهذا أمر لا معنى له حسب قواعد التركيب التى نطبقها فلا يمكن لثابت النفى أن

يأتى بعد صيغة هى (R & S) ، أو قبل ثابت آخر هو التضمن فى حالتنا هذه. ولكن لنر هل يمكن تكوين الشجرة؟



أمر لا معنى له حسب قواعد التركيب التى نطبقها فلا يمكن لثابت النفى أن يأتى بعد صيغة هى (R & S) ، أو قبل ثابت آخر هو التضمن فى حالتنا هنا. لكن لنر هل يمكن تكوين الشجرة؟

نلاحظ أننا قطعنا خطوة هنا وخطوتين هناك، ولكننا أبداً لم نصل إلى تكوين الصيغة الأصلية. فقد اصطدمنا بثابتين متجاورين هما النفى ثم التضمن (من اليسار)، ولا مكن أن نستخدمها بشكل صحيح للوصول إلى الصيغة. ولو انعكس وضعهما، أى كانا "~→" لكان للصيغة معنى، فالنفى سيكون للصيغة الجزئية{ (P & Q) v R }" ، ثم نقيم علاقة التضمن بين القوس " (R & S)" والصيغة " {(P & Q) v R} ~ " ولكن هذا لم يحدث لأن الصغة المطلوبة فاسدة التركيب.

لعل من المفيد الاشارة إلى طريقة أخرى لتوظيف الأشجار التركيبية

فى بيان البنية الداخلية للصيغ المنطقية. نجد هذا عند كاليش ومونتاجيو[١] باسم الشجرة النحوية Grammatical Tree ونجده عند بونيفاك[٢] باسم آخر هو شجرة تركيب العبارات Phrase Structure أما السمة التى تميز الطريقة التى يستخدمها هؤلاء المناطقة فهى أنهم يقلبون الشجرة، فيضعون الصيغة الكاملة فى قمتها لتتفرع بعد ذلك وفقا لقواعد تحليل تمثل مقلوب القواعد التى تحدثنا عنها. ولهذا فالطريقة عبارة عن وسيلة لتحليل الصيغ المركبة، بينما الأمثلة السابقة تتحدث عن تكوين الصيغ من المتغيرات.

ولعل من المفيد أن نعرض مثالاً لتوضيح هذا الأمر. لاحظ فقط أننا نبدأ بالصيغة الكاملة، ثم نسقط الثابت الرئيسى مع كتابة الطرف أو الطرفين اللذين يربط بينهما، ثم ننقل نفس الشئ بالنسبة للثوابت الأصغر تدريجيا، حتى نصل إلى المتغيرات فقط فى كل فروع الشجرة. وفى المثال المركب التالى سنلاحظ أن وصف الشجرة المقلوبة مناسب تماماً، لأننا إذا قلبنا الصفحة سنجد أننا أمام الشجرة التركيبية التى تحدثنا عنها فى الصفحات السابقة. وهذا لا يمنع وجود اختلاف فى الحركة كما قدمنا

مثال:

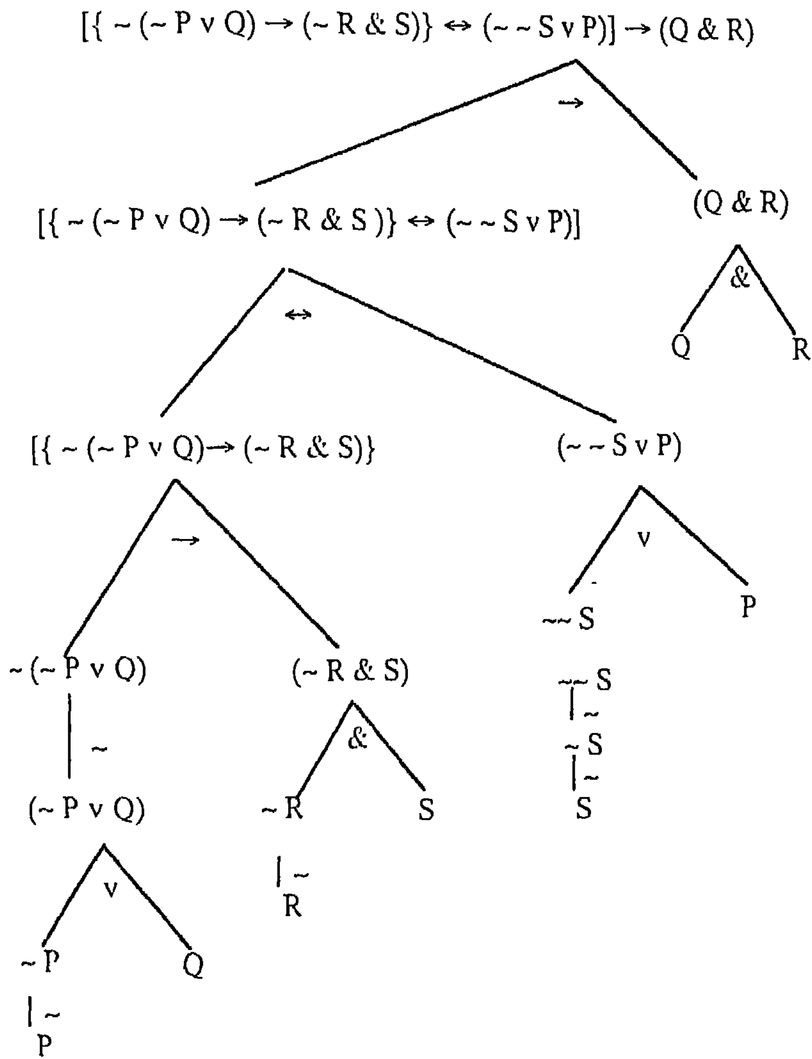
استخدم الشجرة المقلوبة فى تحليل الصيغة التالية:

$$[\{\sim(\sim P \vee Q) \rightarrow (\sim R \,\&\, S)\} \leftrightarrow (\sim\sim S \vee P)] \rightarrow (Q \,\&\, R)$$

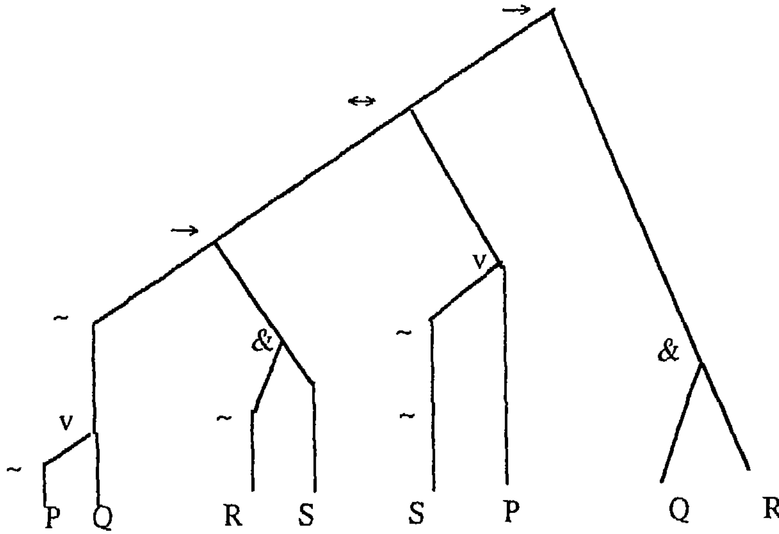
---

(1) Kalish, D., Montague, R. & Mar, G (1980), PP . 5 . ff
(2) Bonevac, D. (1987), PP . 38 - 40.

V.


[{ ~ (~ P v Q) → (~ R & S)} ↔ (~ ~ S v P)] → (Q & R)
→
[{ ~ (~ P v Q) → (~ R & S)} ↔ (~ ~ S v P)]
(Q & R)
&
Q
R
↔
[{ ~ (~ P v Q)→ (~ R & S)}
(~ ~ S v P)
→
v
~~ S
P
~ (~ P v Q)
(~ R & S)
~~ S
~
~
~ S
&
~
(~ P v Q)
~ R
S
S
~
R
v
~ P
Q
~
P

ونستطيع بالاستعانة بما قدمه ڤان ديلن[١] Van Dalen أن نبسط الشجرة المقلوبة أو شجرة التحليل هذه. وتم هذا أساساً بأن تكون قمة فروع الشجرة هى المتغيرات، ثم نذكر الثابت فقط عند كل خطوة تركيبية، ولا نذكر الصيغة كلها كما يفعل كاليش وبونيفاك وغيرهما، وبهذا تكون شجرة التحليل على النحو التالى:



(1) Van Dalen, D. (1989)., pp. 10 -12

الفصل الثاني
مفهوم الصورة المنطقية

الفصل الثانى

مفهوم الصورة المنطقية

يتمثل عمل المنطقى، فى جانبه التطبيقى، فى مهمتين أساسيتين بالدرجة الأولى. عليه من ناحية أن يقوم بدراسة العمليات الاستدلالية الفعلية التى نقوم بها فى حياتنااليومية العادية أو الرسمية أو الأكاديمية، وفى الكتابات الصحفية والفكرية وربما الأدبية أيضاً، وذلك بغرض الكشف عن صورة Form ، أو بنية Structure يجرى الاستدلال وفقا لها، تعرف بالصورة المنطقية Logical Form ويسعى المنطقى، من ناحية أخرى، إلى التحقق من مدى سلامة العملية الاستدلالية، مستخدماً فى ذلك الأدوات والاساليب التى يوفرها له الجهاز المنطقى الموجود بين يديه، ومحكوماً بالقواعد الصارمة التى يفرضها نسق هذا المنطق. ويتوقف القرار الذى يتخذه المنطقى فى هذا الصدد على نجاحه فى استخراج الصورة المنطقية الخاصة بالاستدلال الفعلى، وفى تطبيق قواعد النسق عليها .

ولأن عملية اكتشاف الصورة المنطقية هى عملية تجريد بالدرجة الأولى فإن النتيجة التى نخرج بها من عملية التقييم التى نطبقها على الاستدلال تكون ذات أهمية تتعدى حدود البرهان أو الاستدلال المعين الذى بدأنا منه. نقول أولاً إن استخراج الصورة المنطقية عملية تجريدية بمعنى أن الهدف هو استخراج ما يمكن أن نسميه بالعامل المشترك (المنطقى) بين قضايا هذا الاستدلال وغيرها من القضايا التى تختلف فى محتواها أو مضمونها. هذا

العامل المشترك هو ما نسميه الصورة المنطقية ومعنى هذا أن مجموعة الثوابت المنطقية المستخدمة فى كل الحالات واحدة، وما القضايا البسيطة، أو الجزئية المستخدمة إلا متغيرات، بحيث يمكن استبدال أى قضية آخرى بها. ولهذا لا تعتمد صحة الاستدلال على مادة أو محتوى هذه القضايا، بل تعتمد بالدرجة الأولى على تعريفات الثوابت المنطقية المستخدمة.

وهنا تكمن صورية المنطق، سواء التقليدى أو الحديث، وتتجلى أهمية القرار المنطقى الذى نخرج به عن طريق تطبيق القواعد الخاصة بالنسق، فإذا كانت الصورة المنطقية التى نتعامل معها صحيحة Valid امتد الحكم بسهولة إلى كل نماذج هذه الصورة من استدلالات فعلية، وفى هذه الحالة يستحيل على أى من هذه الاستدلالات أن تكون كل مقدماتها صادقة ونتيجتها كاذبة، وهذا هو معنى الصحة المنطقية. أما إذا انتفت صفة الصحة عن الصورة المنطقية التى بين أيدينا، انتفى معها ضمان الانتقال السليم من مقدمات صادقة إلى نتيجة صادقة فى كل أمثلة هذه الصورة .

وينصب اهتمامنا فى الفصل الحالى على محاولة استكشاف مفهوم الصورة المنطقية فى أبسط صوره، وهو المفهوم مطبقاً على مستوى حساب القضايا فقط، بمعنى أن المتغيرات فى الصيغة المنطقية تكون دائماً معبرة عن قضايا كاملة، أى جمل اخبارية تامة المعنى، والثوابت عبارة عن مجموعة صغيرة من الرموز التى تربط بين هذه المتغيرات وهناك بالقطع طبقات أعمق يستطيع المنطقى باستخدام أدوات أدق أن يستجليها، وأن يوضح دلالتها فى تبرير استدلالات أعمق، وأشمل. ولكننا سنقتصر هنا على كيفية تركيب قضايا من قضايا، وليس من حدود، ذلك أن مسألة تركيب القضايا من حدود، والاستدلالات المرتبطة بتحليل القضايا هى موضوع النظرية التى

نسميها المنطق العام General Logic .

ا - اللغة الطبيعية واللغة المنطقية:

الحديث عن الصورة المنطقية يقتضى الحديث عن لغتين ، وعن وشائج القربى، ونقاط الاختلاف بينهما. اللغة الأولى هى اللغة الطبيعيةNatural Language ، وهى اللغة الأصل التى نستخرج منها، ومن الاستدلالات المصاغة بحروفها، صورة منطقية نصوغها بلغة آخرى مختلفة عن الأولى وهى ما تعرف باللغة المنطقية .

واللغة المنطقية مجموعة من الرموز التى نستخدمها فى التعبير عن القضايا والاستدلالات بصورة دقيقة ومحايدة، بفضل القواعد والآلبات التى تحكم ارتباط هذه الرموز البسيطة والقليلة العدد لتكوين صيغ أكبر وأكثر تعقيداً . ومن البديهى أن تكون هناك مواضع للإختلاف الحاسم بين اللغتين، نرصدها فى المستويات التالية :

مستوى المفردات :

تتميز مفردات اللغة المنطقية بالدقة والوضوح بحيث يكون لكل مفردة معنى محدد واحد، فمثلاً الرمز(&)، كما نعرف ، يشير إلى ثابت الوصل الذى يعنى صدق طرفيه معاً . ونفس الحكم ينطبق على بقية مفردات اللغة المنطقية . أما اللغة الطبيعية فتحتوى على مفردات غامضة Vague، أى أننا لا نملك معايير محددة لتطبيقها على أفراد معينين، وفى حالات معينة، مثل صفة "قصير" أو "طويل" كما توجد ألفاظ ملتبسة Ambiguous ،أى تحمل أكثر من معنى مثل كلمة "عين". وهناك ظاهرة الترادف، وهى ظاهرة

وجود بعض الألفاظ التى تشير إلى معنى واحد فى سياقات معينة، وربما لا يشمل هذا كل السياقات التى ترد فيها تلك الألفاظ.(١) .

مستوى التركيب :

تستخدم مفردات اللغة المنطقية فى تركيب جمل أوصيغ ومن قواعد تركيب ثابتة ، ويتم الاعلان عن هذه القواعد فى بداية عرض النسق المنطقى،(وهذا مافعلناه فى نهاية الفصل السابق) وتكون عادة قليلة العدد إلى حد كبير، وواضحة ، وبسيطة بخلاف قواعد تركيب اللغة الطبيعية التى تتسم بالتعقد الشديد الذى يعتبر أحد مصادر الخلاف بين المدارس النحوية واللغوية المتعددة. وكثيراً ما نجد فى اللغة الطبيعية تراكيب غير قياسية، وإجراءات تركيبية نحوية معينة مثل التقديم والتأخير، والغرض منها بلاغى غالباً، وهذا ما لا نجد له نظيراً فى اللغة المنطقية التى لا تسمح سوى بإجراء تركيبى محدد للتعبير عن صيغة محددة .

المستوى الاستدلالى :

إننا نقوم بعمليات استدلالية واسعة نستخدم فيها اللغة الطبيعية مثلاً المحامى الذى يناقش شاهدا فى إحدى القضايا بهدف تبرئة موكله، أم الطبيب الذى يسأل المريض عن الأغراض التى بشعر بها لكى يستدل منها على نوع المرض الذى يشكو منه، وغير ذلك من الأمثلة كثير. فى مقابل هذه الممارسات التى تعتبر جزئية أحياناً وعفوية أحياناً أخرى، نجد أن النظرية المنطقية المعاصرة تحتوى على نظرية برهان Proof Theory دقيقة

---

(١) راجع مثلاً تناول سينزبرى لظاهرة الالتباس الخاصة بالمفردات فى كتابه الحديث
Sainsbury, R.M (1991),p. 91

وتفصيلية . والواقع أن المقارنة بين نمطى البرهان فى الحالتين يكشف عن نتائج طريفة وما يهمنا هو أن المناطقة يسعون فى دراساتهم إلى تقييم أنماط الاستدلالات التى نقوم بها مستخدمين اللغة الطبيعية بهدف تقنينها وربما إدماجها فى أنساقهم النظرية . ويدخل ضمن الدور النقدى، كما نعلم، تمييز صحيح الاستدلال من فاسده .

المستوى الدلالى :

اللغة ، سواء كانت منطقية أو طبيعية، لها مفرداتها، ولها قواعد التركيب الخاصة بها، كذلك قواعد الاستدلال أو الاشتقاق التى تنظم العلاقات المنطقية بين صيغها . كل هذا يدخل تحت باب التركيب بصورة عامة . والمطلوب من اللغة أن تدل على العالم الخارجى، وهذا ما يسمى بالدلالة. ولعلنا قد لاحظنا من عرضنا لمستويات الاختلاف التركيبية السابقة أنها تنعكس بقوة فى المستوى الدلالى، بل وتتقاطع معه فى الواقع . هناك مثلاً ظاهرة الترادف التى أشرنا إليها . هذه ظاهرة دلالية بالدرجة الأولى ، لأن ما يجمع اللفظين المترادفين هو مايدلان عليه فى العالم الخارجى، ومن حيث أنه فى بعض السياقات يكون مدلولاً واحداً . وقس على هذا بقية الظواهر اللغوية الخاصة باللغة الطبيعية التى تعكس اضطراباً فى المستوى الدلالى أيضاً أما اللغة المنطقية منظرية الصدق الكلاسيكية التى سنعرضها بالتفصيل تمنع وجود الظواهر التى رصدناها فى اللغة الطبيعية .

المستوى الإستخدامى :

اللغة الطبيعة ليست كياناً مجرداً ولد فى فراغ ، إنها أشبه بالكائن الحى الذى يتفاعل مع ما يحيط به من ظواهر إجتماعية أو ثقافية . أما

اللغة المنطقية فعلي العكس تماماً، إنها اختراع حديث جداً، قام على تطويره وتهذيبه مجموعة قليلة من المتخصصين الذين يفعلون هذا بدافع تطوير هذا الجهاز الرمزى الصناعى المنفصل عن أى سياق إجتماعى أو ثقافى أو حتى سيكولوجى. ومن هنا يتضح مستوى آخر للإختلاف بين اللغة الطبيعية واللغة المنطقية مما يدفعنا إلى الحذر الشديد حين نتناول مدى قدرة النظرية المنطقية على التفاعل مع الاستدلالات الطبيعية .

ولعلنا نلاحظ فى السياق الحالى أن المستويات التى تناولناها فى السطور السابقة ليست جزراً منعزلة، بل إن هناك تداخلاً واضحاً بينها. ومعنى هذا أن المقارنة بين اللغتين الطبيعية والمنطقية لاتتم على مستوى معين بصورة منعزلة عن بقية مستويات المقارنة. والمتصور هنا أن بعض أوجه المقارنة والاختلاف على المستوى التركيبى مثلاً تعود إلى اعتبارات دلالية أو استخدامية، والعكس صحيح. إن ما يجب أن يستفاد من المناقشة السابقة هو أن مناطق الإختلاف والتباين بين اللغتين كثيرة ، ويجب الاحتراز من الخلط بين اللغتين، كما تعودنا فى دراستنا للمنطق التقليدى.

ونستطيع أن نستخلص من المقارنة السابقة بعض السمات العامة التى تميز اللغة المنطقية، ونجملها فيما يلى :

أ- الصورية :

المنطق الذى ندرسه، سواء كان تقليديا أو حديثا، صورى بالدرجة الأولى . ويتميز المنطق الحديث باغراقه فى الصورية، وتمسكه باستخدام الرموز سواء للثوابت أو المتغيرات تحقيقاً لمبدأ حياد المنطق بالنسبة

للموضوعات يطبق عليها، ويتميز أيضا بمحاولة الكشف عن مستويات أعمق من العلاقات الصورية بين قضاياه .

ب - الدقة والبساطة :

تتميز اللغة المنطقية بالدقة والبساطة الشديدتين، بل إن الهدف من إبتكار مثل هذه اللغة هو احراز أكبر قدر من الدقة . ومع هذا لايتم ذلك على حساب بساطة القواعد، والخلو من الحشود والزيادات، مما يعنى أن هذه اللغة تنطوى على قدر كبير من الاختصار(١)

جـ- عدم التناقض

يحرص المناطقة على أن تخلو لغتهم من التناقضContradiction أو التناقض الظاهرى Paradox ، أو المفارقة Antinomy ، وهى ظواهر تلتصق باللغة الطبيعية نتيجة لسماتها التى سبقت الاشارة إليها. على أن هذا لا يعنى بالضرورة خلو الأنساق المنطقية من التناقض بصورة قاطعة ونحن نعرف أن واحداً من أهم إسهامات كيرت جودل المنطقى العظيم هو أنه بين لنا إستحالة إقامة البرهان على خلو النسق الصورى من التناقض بصورة قاطعه .

د - اللغة الصناعية :

من البديهى أن تكون اللغة المنطقية لغة صناعية، مادامت توضع فى مقابل اللغة الطبيعية، وهى لغة صناعية بمعنى أنها لم تتطور بصورة طبيعية فى مجتمع إنسانى معين، بل تم اختراعها من قبل باحث أو عدد محدود من الباحثين ، يرتبط بهذا الملمح حقيقة على درجة كبيرة من الأهمية، وهى أن

---
(1) Lemmon, J. (1965), p .3

اللغة المنطقية تعتبر الأساس فى وضع برامج الكمبيوتر المتقدمة، بل فى فكرة الكمبيوتر ذاتها هذا فضلاً عن تطبيقات الكمبيوتر المتنوعة وصولاً إلى الأنظمة الخبيرةExpert Systems والذكاء الصناعى .

هـ - العلاقة مع اللغة الطبيعية :

تناولنا فيما سبق العلاقة بين اللغة المنطقية واللغة الطبيعية فيما يتعلق بجوانب الاختلاف بينهما . برغم هذا فجوانب الاتصال بينهما قوية واضحة ، فمن المعروف أن أحد مباحث المنطق وفلسفة اللغة يتمثل فى محاولة تنظير الحد الأدنى من الملامح بلغة طبيعية ما المشترك بينهما، والفكرة العامة وراء تلك المحاولة ذات المغزى الفلسفى العميق هى أن الحد الأدنى يتطابق مع اللغة المنطقية، مما يجعل منها جوهر اللغات الطبيعية جميعاً، وربما تمثل بنية الفكر البشرى، ومنظومة ملامح العالم الخارجى العامة فى آن معاً .

٣ - تعريف الصورة المنطقية :

ليس إلى الشك من سبيل فى أهمية دراسة الصورة المنطقية للغة الطبيعية سواء اللغة العربية، أو أى لغة انسانية أخرى . ولا يقتصر الأمر على وسيلة لاختبار الصحة المنطقية للإستدلالات التى نعبر عنها باللغة الطبيعية عن طريق تحويل هذه الاستدلالات الى متتابعات رمزية نستخدم فى التعبير عنها اللغة المنطقية الصناعية التى تسهل الأمر إلى حد كبير. نقول إن الأمر لا يقتصر على هذا - رغم أهمية هذا الاعتبار فى حد ذاته . ولكن فضلاً عن ذلك نجد أن اكتشاف الصور المنطقية لجمل وعبارات اللغة يعتبر هدفاً فلسفياً فى ذاته، وهذا تمثل فى رؤية رسل وفتجنشتين فى الربع الأول

من القرن العشرين فيما يعرف بمشروع المنطق الفلسفى الرسلى .(١)

غير أن هذا لا يتعارض مع تسليمنا بأن الاعتبارات التى أوضحناها فى مقدمة الفصل، وفى صفحاته الأولى تجعل من الخطأ اعتبار النظرية المنطقية متطابقة مع دراسة منطق اللغة (الطبيعية) صحيح أنهما متداخلان، ومتعاونان ، ولكنهما بالقطع غير متطابقين (٢) وأظن أن هذه النقطة قد أوفيت حقها فى الصفحات السابقة .

وبناء على هذا نجد أن الكثير من الدراسين يؤكد على وجود العديد من الصعوبات التى تكتنف عملية توظيف فكرة الصورة المنطقية فى اختبار الصحة المنطقية للاستدلالات، وهى العملية التى يتم بواسطتها ترجمة الجمل الطبيعية إلى اللغة المنطقية . ومن هذا الصعوبات ما يعرف بظاهرة التنوع الأسلوبىStylistic Variance(٣) التى نبهنا إليها كاليش ومونتاجيو على سبيل المثال. وهى كما يتضح من اسمها مرتبطة بقدرة اللغة الطبيعية على التعبير عن نفس القضية بأكثر من أسلوب لغوى معين . ولهذا نجد كاليش ومونتاجيو، وكذلك لامبرت وادلريك فى دراستيهم الهامتين يؤكدون على أهمية البحث فى مسألة تحويل الحجج المصاغة بلغة طبيعية إلى اللغة المنطقية عن طريق تجاوز ظاهرة التنوع الأسلوبى، والإتفاق على الترجمة

---

(١) راجع فى هذا دراسة سينزبرى الحديثة (١٩٩١) فضلاً عن كتابات رسل فى المرحلة المشار إليها، وكذلك دراسة فتجنشتين الشهيرة "الرسالة المنطقية الفلسفية" .

(٢) راجع فى تفصيل هذا الأمر دراسة سير بيتر ستروصن الهامة التى صدرت عام ١٩٥٢ انظر مثلاً
Strawson (1952), pp . 231 -2

(3) Kalish & Montague & Mar (1980), pp. 11 - 13

إلى اللغة المنطقية على مرحلتين . فى الأولى تأخذ الجملة ذات الاسلوب العادى ونترجمها إلى جملة نمطية محدودة سلفاً تحتوى على مقابلات لفظيه معينة للترابت، وكذلك للجمل ثم ، بعد ذلك، التوجمة إلى اللغة المنطقية(١) .

إن المشروع الضخم الذى يشارك فيه عدد كبير من المناطقة فى الكثير من مراكز البحث والجامعات فى العالم، والذى ينظر إلى الصورة المنطقية لجمل اللغة الطبيعية باعتبارها المفتاح الأكيد لتقييم الاستدلالات يصادف مصاعب شتى . وقد دعت هذه المصاعب نفراً من الباحثين إلى انتقاد هذا الموقف الكلاسيكى بصراحة . ومنهم فيشر الذى صدر له حديثاً دراسة شائقة بعنوان . منطقة الحجج الواقعية " يذهب فيه إلى استحالة نجاح المشروع التحليلى الذى يعتمد على استراتيجية استخراج الصور المنطقية فقط وخاصة ابتعدنا عن الأمثلة المعدة سلفاً (٢)، كما يقول.

غير أن الكثرة الغالبة من المناطقة وفلاسفة التحليل المعاصرين يسلمون مع فيشر بالصعوبات الجمة التى تكتنف الطريق، والتى تقلص إلى حد كبير نفوذ النظرية المنطقية الصورية فى صورتها المعاصرة، ولكنهم يؤكدون أن مثل هذه العوائق مما يجب النظر إليه فى إطار التنامى المتزايد للنظرية المنطقية، مما جعل من المشروع بالنسبة لرواد المنطق أن يطمحوا إلى تقديم قاعدة صورية صرفة لكل استدلال صحيح . هذا فضلاً عن طموحهم نحو استنباط النتائج الفلسفية جميعاً من عملية ترجمة عبارات اللغة – الطبيعية سواء كان علمية أو أدبية أو قانونية أو فى الحديث اليومى

(1) Lambert & Olrich, (1980).

(2) Fisher,A . (1988) . The Logic of Real Arguments, Combridg University Press, Cambridge, pp . 154 - 5 .

العادى إلى اللغة المنطقية(١).

ولعل أفضل من عبر عن موقف وسط بين تيارين متناقضين تماماً هو الفيلسوف البريطاني السير بيتر ستروصن الذى تعتبر أراؤه حلاً وسطا بين موقف رسل وفتجنشتين فى مرحلة الذرية المنطقية من ناحية، واليك فيشر فى دراسته المشار إليها أعلاها . يرى ستروصن أن دراسة المنطق الصورى تسير جنباً إلى جنب مع نوع من الدراسة يمكن تسميتها بدراسة الملامح المنطقية للغة العادية (أو الطبيعية)، وأن كلا منهما يمكن أن يفيد الآخر.... إن واحداً من الدورس الكبرى فى هذا الصدد هى أن العلاقات الاستنباطية البسيطة لا يمكن بأى حال أن تكون هى النوع الوحيد الذى يجب علينا ملاحظته، ووضعه فى الاعتبار، إذا كنا نبغى دراسة السلوك المنطقى للغة. يجب علينا أن نفكر فى زوايا أخرى وعناصر أخرى بالإضافة إلى اللزوم والتناقض، وأن نستخدم أدوات آخرى فضلاً عن تلك التى تنتمى للمنطق .(٢)

وبالرغم من هذه الاعتبارات فمن الضرورى أن نتوقف قليلاً مع ستروصن فى محاولة تعريف الصورة المنطقية بشكل يوضح مانرمى إليه من محاذير، وكذلك لتمهد للحديث عن صلتها بمفهوم الصحة المنطقية كما سيتضح فى الباب التالى .

---

(١) راجع مثلاً :

Sainsbury, R.M (1991)

(2) Strawson , P . (1952), pp. 231 - 2

وقـد يمكن تعـريف الصـورة المنطقـيـة بأنهـا تمثل الهـيكل العظمى (اللفظى) الذى يتبقى بعدما نتخلص من كل التـعبيرات التى تستـخدم فى صياغة الجملة فيما عدا الثوابت المنطقية، وبحيث يتم استبدال متغيرات بالتعبيرات التى تتخلص منها . (١) ومـعنى ذلك أن كل مـاعلينا لاسـتـخـراج الصورة المنطقية أن نرفع من الحملة كل أجزاء الكلام التى تشير إلى أشياء أو صفات أو أفعال ونضع مكانها متغيرات وبالنسبة للروابط اللغوية نتركها كما هى أو نضـع مكانها الثوابت المنطقيـة المناسبة ويبدو أن هذا التـعبير قـريب من الأمـثلة البـسـيطة التى شرحـنـاها فى الفصل السـابق، غـيـر أنه ينطوى على كثير من الصعوبات التى تتمثل فى أن قائمة الثوابت المنطقية ليست متطابق مع قائمة محدودة من الروابط اللغوية ، وهذا ما تناولناه حين درسنا الثوابت المنطقية والعلاقات بينها وبين روابط لغوية معينة . ونتيجة مباشرة لهذه الملحوظة أننا قد نجد جملة مركبة لا تحتوى على رابطة لغوية من تلك التى اتفقنا مسبقاً على تناظرها مع ثابت معين، ومـع ذلك فـيـجب اعتبارها ذات صورة منطقية محددة،ومثال ذلك قولهم :

"رجـوته كـثيـراً أن يصـفح عن هـذه الاسـاءة، غـيـر أنه لم يسـتـجب والمقصود هنا أن الرابطة "غير أن " ، أو "بيد أن"، أو "ولكنه" وغيرها قد لا تكون ضمن قائمة محددة للروابط اللغوية التى تعبرعن الوصل ولكننا على مستوى حساب القضـايا نجد أنهـا ترتبط بثابت الوصل الذى نرمز إليـه بالرمز (&)٠ إن مفـردات اللغـة حتى الروابط منهـا لا ترتـبط بمعنى مـحدد بشكل مطلق ، منفـصل عن اسـتـخـدام اللغـة فـى سيـاقـات مـخـتلفـة بأفـراد

(1) Ibid, p 49

مختلفين وهناك سمة آخرى تتعارض مع التعريف المبدئى الذى قد مناه تواً . تتمثل هذه السمة فى أننا قد نجد أكثر من جملة لغوية تتشابه فى الصورة اللغوية ومع ذلك لا تتشابة فى الصورة المنطقية . فإذا أخذنا بالتعريف السابق للصورة المنطقية فقد نخطىء فى التعبير عنها، فنقرر إن لحملتين أو أكثر من صورة منطقية واحدة ، وتجدر الاشارة إلى أن فيلسوفا معاصراً هو تشومسكى قد استثمر هذه السمة فى بناء نظرية شهيرة فى فلسفة اللغة تعتمد على الفارق بين البنية السصحية والبنية العميقة، وواضح أن فكرته قريبة جداً من فكرة الفارق بين الصورة اللغوية والصورة المنطقية للجمل . غير أن التوسع فى هذه النقطة ليس مما يهمنا فى السياق الحالى، فما ينبغى الاتفاق عليه هو فقط أن هناك صعوبات جمة تكتنف التعريف السابق للصورة المنطقية .

ولعلنا، فى ضوء الاعتبارات المشار إليها، نصرف النظر عن هذا التعريف ونبحث فى اتجاه آخر . ونجد فى هذا الإطار أن المنطقى الصورى يهتم بتماثلات من نوع معين بين استدلالات خاصة بوضوعات متنوعة جداً وقد تكون وهذه التماثلات قريبة جداً من تشكيل نمط يمثل بصورة حقيقية البنية المنطقية للجملة، ويلائم أهداف المنطقى الصورى الخاصة (١).

وينبهنا ستروصن إلى فكرة القوة (أو القوى) المنطقية Logical Powers للجملة، وهى تمثل فى رأيه المدى الكامل لكل العلاقات المنطقية التى تدخل فيها هذه الجملة، ونعنى بذلك كافة الأدوار المنطقية التى يمكن أن تلعبها، سواء كان المقصود بذلك قدرة هذه الجملة على تضمن جملة أخرى،

(1) Ibid , p.50

أو تضمنها بواسطة جمل أخرى غيرها . ومن هنا يأتى تعريف الصورة المنطقية بأنها تلك الصورة التى تمكننا من إظهار القوة المنطقية للجملة بشكل كامل .

على أنه من الواجب أن نتنبة لاعتبار هام جداً ، يتمثل فى ضرورة ربط فكرة الصورة المنطقية بنظرية معينة. واهتمامنا بهذا الاعتبار ينطلق أساساً من كون النظرية المنطقية تفرض على الباحث أن يستخدم مفرداتها فقط فى التعبير عن الصورة المنطقية للجملة المعينة، مما يعنى أن من الجائز وجود أكثر من صورة منطقية لجملة واحدة بحسب عدد النظريات المنطقية المقبولة لدينا، وعلى سبيل المثال القضية "الشمس ساطعة" تأخذ فى حساب القضايا الصورة المنطقية (P) وحدود قوتها المنطقية داخل نظرية حساب القضايا مرتبطة - بهذه الصورة بشكل وثيق . أما إذا ربطنا الصورة المنطقية للجملة بنظرية حساب المحمول فيجب أن نبحث بعمق أكبر فى بنية الجملة وتحليلها بحيث تستخدم متغيرات حساب المحمول وقوانينه فى التعبير عن الجملة، مما يسهل اكتشاف نسق العلاقات المنطقية التى تدخل فيها الجملة ضمن إطار حساب المحمول. ولا شك أن فى هذا توسيعاً لقوة الجملة المنطقية لتشمل علاقات استدلال جديدة .

ونستطع الآن أن نقول تأسيساً على ماسبق إن لقضيتين نفس الصورة المنطقية إذا تم التعبير عنهما بجملتين يتوافرفيهما الشرطان التاليان : الأول أن الجملتين تمثلا ن نفس الصيغة المنطقية حتى وإن إختلفا فى الصورة اللغوية كما أشرنا ، أما الشرط الثانى، وهو الأهم، فيتمثل فى أن الثوابت المنطقية يجب أن تلعب نفس الدور المنطقى النمطى بالنسبة لنسق القواعد

(1) Ibid, p . 52

المعطى لنا.[١] ولعل من نتائج هذا الأمر إمكان إن نأخذ نفس الصيغة اللغوية صورة منطقية معينة أحياناً ، وصورة منطقية أخرى أحياناً أخرى ومن الضرورى أن نتوقف هنامع ستروصن لنستجلى بعض الأخطاء والأوهام التى نجدها عن المتحمسين لفكرة الصورة المنطقية وخاصة فى بواكيرها الأولى . أما أول الأوهام فهو الحديث عن الصورة المنطقية بالألف واللام[٢] ، أى اعتبار أن هناك صورة منطقية واحدة ووحيدة لكل جملة لغوية. ولقد أشرنا تواً إلى خطأ هذا الافتراض مما يعنى أن مفهوم الصورة المنطقية ليس استبعادياً .والخلاصة هنا أن دخول جملة أو عبارة ضمن صورة منطقية معينة لا يعنى استبعاد دخولها ضمن صور منطقية أخرى .

ويوم أن نجد النظرية المنطقية الكاملة، وهى النظرية التى تستوعب آلياتها كل إمكانيات اللغة الاستدلالية، وفى هذا الإطار ستضم هذه النظرية داخلها ، القوى المنطقية لكل النظريات التى تفترضها، فى هذه اللحظة فقط نستطيع الحديث عن الصورة المنطقية بالألف واللام . وغنى عن البيان أننا بعيدون عن هذا الحلم إلى حد كبير جداً . ولعل هذا الحلم بالتحديد هو ما نعتبره الخطأ أو الوهم الثانى الذى واجه جهود رواد نظرية الصورة المنطقية الأوائل ، وهما رسل وفتجنشتين ، ذلك أننا نعلم كم حاول كل منهما أن يثبت أن نظرية المنطق الصورى المعاصرة التى تعتمد على الصورة المنطقية تستوعب العمليات الاستدلالية الصحيحة كلها. [٣] وبرغم أنه خطأ

---

(2) Ibid, p . 53
(3) Ibid, p . 54

صريح ووهم كبير إلا إنه كان له فضل توسع النظرية المنطقية بصورة غير مسبوقة فى التاريخ، وشهد القرن العشرون بالذات توالداً هائلاً للنظريات المنطقية التى تسعى فى جوهرها لتوسيع قدرة المنطق على التنظير والتقويم لنطاق متزايد من الاستدلالات(١) .

ولا شك أن هذا يقودنا إلى التوقف عند الوهم الأخير بالنسبة لدراسة الصورة المنطقية ، وهو القول بأن مهمة المنطق مزدوجة ، وهى تتمثل فى :

أ - اكتشاف الصور المنطقية للجمل (أو القضايا) .

ب - اكتشاف العلاقات المنطقية بين القضايا (أو الجمل) بناء على صورتها المنطقية .

وليس الخطأ فى اعتبار مهمة المنطقى متمثلة فى هاتين المنطقتين فى حد ذاته، بل الخطأ يكمن فى اعتبارهما مهمتين منفصلتين تماماً ، فضلاً عن اعتبار أن المهمة الأولى هى الأساس الذى يجب أن ننجزه أولاً ، ثم ننتقل منه إلى تنفيذ المهمة الثانية .

وينبهنا ستروصن إلى أن المهمتين غير منفصلتين بهذه الصورة إطلاقات بل إنهما يكادان أن يتطابقا ، ففى الوقت الذى نبحث فيه عن الصورة المنطقية بهدف توسيع دائرة العلاقات الاستدلالية ، فإننا نكون فى كثير من الأحيان مدفوعين بهذا الاعتبار، أى أن تكون بحثنا عن الصورة المنطقية منطلقاً من وجود استدلالات لا تستطيع نظريتنا الأصغر أن تقدم لها أساساً مقبولاً خلاصة الأمر أن المهمتين تلتقيان فى مهمة واحدة كل

---

(١) راجع فى هذا الصدد دراسة مارك سينزبرى الحديثة

Sainsbury, R. M. (1991).(Logical Forms)

منهما يغذى الآخر بالدافع أحياناً، ويستفيد منه بالتطبيق أحياناً أخرى(١) وبالرغم من ذلك فإننا سنقتصر فى حالتنا هذه على دراسة بعض النماذج التطبيقية التى توضح كيفية استخراج الصور المنطقية لاستدلالات نجدها فى الحياة الطبيعية وتأجيل البحث فى القوى المنطقية للجمل وللصيغ التى تمثلها إلى البابين الثانى والثالث، وقبل أن نفعل ذلك يحسن أن نستكمل لغتنا المنطقية حتى نستطيع التعبير عن الاستدلالات بواسطتها .

أما الرمز الأول فهو الرمز الذى يدل على عملية الاستدلال ذاتها ، وهو يقابل فى اللغة الطبيعية عبارات مثل : "إذن" ، أو "بناء على ماسبق نستنتج أن" وغيرها من العبارات . ويجب التأكيد هنا على أن الرمز ليس ثابتاً منطقياً بالمعنى الذى حددناه فى الفصل السابق . إن هذا الثابت يقيم علاقة اللزوم Entailment بين مجموعة المقدمات والنتيجة ، ويكتب هكذا ($\models$) أو هكذا ($\vdash$) بحسب المعنى الذى يتخذه اللزوم

ونحن نستخدم الرمزين ليدلان على العلاقة الاستدلالية بين المقدمات والنتيجة، ولكن الأول يتناول الجانب الدلالى الذى يهتم به الباب الثانى من هذه الدراسة، والرمز الثانى يدل على الجانب الاشتقاقى الذى يهتم به الباب الثالث من الدراسة . وتجدر الإشارة إلى أن ستروصن يذهب إلى اعتبار مايدل على اللزوم بنوعيه منتمياً إلى اللغة من الدرجة الثانية(٢) Second order ،. والمقصود بها تلك لغة تتحدث عن لغة الدرجة الأولى، وهى اللغة الشيئية التى تصف الأشياء الموجودة فى العالم أو تسعى إلى أن تفعل ذلك

(1) Strawson, P, Op.cit , pp . 55 - 6
(1) Ibid, p . 15

ويتفاوت نصيبها من التوفيق فى ذلك .

ويدخل فى هذا الباب، الفاصلة، التى تستخدم حين تحتوى الاستدلالات على أكثر من مقدمة فتستخدم "الفاصلة" بين جميع المقدمات التى تسبق ثابت اللزوم، وهى أيضاً لا تعد ضمن ثوابت اللغة المنطقية بالمعنى الموجود فى الفصل السابق إنها مثل ثابت اللزوم لتميز بين هذه المقدمات نفسه تنتمى ، إذا قبلنا أطروحة سروصن، إلى لغة الدرجة الثانية . أما التركيب الذى ينتج من ترجمة المقومات والنتيجة الى اللغة المنطقية، ووضع ثابت اللزوم قبل النتيجة مع الفصل بين المقومات بالفاصلة فيسمى المتابعة Sequent ، وهى الصورة المنطقية للإستدلال .

٣- أمثلة تطبيقية

مثال (أ) استخرج الصورة المنطقية للإستدلال التالى :

"سيفوز مرشح الحكومة بالانتخابات إذا لم يفز مرشح المعارضة . ولن يكسب مرشح المعارضة الجولة مالم يتبرع بمئات الألوف من الجنيهات لصالح أبناء الدائرة. غير أن هذا مالن يفعله صاحبنا على الرطلاق . لابد إذن أن يفوز مرشح الحكومة بهذه الإنتخابات ."

لكى نستخرج الصورة المنطقية لهذا الاستدلال تبدأ بتحديد مفتاح الترجمة من اللغة العربية (أو الطبيعية عموماً) إلى اللغة المنطقية المفتاح كما نعلم يتمثل فى تحديد متغيرات معينة لكل قضية (أو جملة) بسيطة ترد فى الاستدلال فى المرحلة التالية يتم تكوين الصيغ المركبة من المتغيرات باكتشاف الثوابت المنطقية المقابلة للروابط اللغوية الواردة بالاستدلال وإضافها إلى المتغيرات المناسبة بالترتيب المناسب. فى المرحلة الأخيرة نرص المقدمات قبل ثابت الاستنتاج الذى يليه النتيجة فقط، على أن نفصل بين كل مقدمة وأخرى بالفاصلة : " , "

المفتاح:

«يفوز مرشح الحكومة بالإنتخابات» يقابلها P

«يفوز مرشح المعارضة بالإنتخابات» يقابلها Q

«يتبرع مرشح المعارضة بمئات الآلاف من الجنيهات» يقابلها R

باستخدام هذا المفتاح نستطيع تركيب صيغ المقدمات على الوجه التالى:

المقدمة الأولى : $" \sim Q \rightarrow P "$

المقدمة الثانية : $" \sim Q \vee R "$

المقدمة الثالثة : $" \sim R "$

النتيجة: $" P "$

لا جدال فى أن إمكانيات اللغة الطبيعية فيما يتعلق بظاهرة تنوع الأسلوب تجعل من الممكن التجاوزعن التطبيق الحرف لمقتضى المفتاح الذى صدرنا به عرضنا لمحاولة تركيب الصورة المنطقية للإستدلال فالجملة «يفوز مرشح المعارضة بالإنتخابات» .

تكافئ الجملة «يكسب مرشح المعارضة الجولة» فى المقدمة الثانية من حيث المعنى. كذلك المقدمة الثالثة التى نستخدم فيها أسلوباً آخر لنفى صدق الطرف الثانى من المركب الفصلى فى المقدمة الثانية، وهذا الفهم هوما يقضى يه السياق العام للإستدلال . لاحظا أيضاً التجاوز غير المخل عن زمن الجمل الذى لا يتناسب مع حاجاتنا فى تقييم هذا الإستدلال ولا مع قدرة حساب القضايا على التعمق فى الصورة المنطقية للجمل والعبارات. يكون، إذن الناتج النهائى، وهو الصوره المنطقيـة للإستـدلال على النحو

التالى:-

$$\sim Q \rightarrow P, \sim Q \vee R, \sim R \models P$$

ومن الوارد أن يحتج بعضهم بأن الصورة المنطقية للإستدلال قد تختلف قليلاً، أو كثيراً عن الصورة التى حددناها أعلاه . قد يقول القائل مثلاً إن " $\sim R$ " ليس مقدمة منفصلة عن القضية الفصلية التى تسبق وهى المقدمة الثانية للمتابعة وطبقاً لهذا الاقتراح تكون الصورة المنطقية للمتابعة على النحو التالى .

$$\sim Q \rightarrow P, (\sim Q \vee R) \& \sim R \models P$$

ونحن لا نشك فى إختلاف هذه الصورة المنطقية عن الأولى، ولكن اعتبارات نظرية الدلالة التى سنبحثها الباب الثانى من هذه الدراسة توضح لنا أن الصورتين ليستا مختلفتين دلالياً على الإطلاق ، وربما نعلم أن البرهان وهو موضوع الباب الثالث سيختلف فى الحالتين قليلاً، ولكنه إختلاف يمكن إهماله على كل حال .

المهم فى الأمر أن الصورتين المنطقيتين يمكن اعتبارهما متكافئتين تجاوزاً مادام الأمر لا ينطوى على تعديل أى قيمة على المستويين الدلالى أو الاشتقاقى، وهذا يختلف عن حالات أخرى نكون فيها بصدد تفسيرين مختلفين للصورة المنطقية لجملة، أو لاستدلال. بحيث يكون الاستدلال طبقاً لأحدهما صحيحا، وغير صحيح بالنسبة للتفسير الآخر. وهذا مرة أخرى يعيد التأكيد على مشكلات الترجمة من اللغة الطبيعية إلى اللغة المنطقية، وهذا ما أوضحناه فى الصفحات الأولى من هذا الفصل .

مثال(٣)

إذا كان فى مقدور ديكارت أن يشك فى أنه يفكر فهو بالتالى يفكر وإذا لم يكن ذلك فى مقدوره فإنه أيضاً يفكر . أما إذا لم يكن ديكارت موجوداً فهو فى هذه الحالة لا يفكر . نستخلص من هذه المقدمات أن ديكارت موجود.

المفتاح :

"فى مقدور ديكارت أن يشك فى أنه يفكر"،	يقابلها	P
"ديكارت يفكر"،	يقابلها	Q
"ديكارت موجود"	يقابلها	R

من الملاحظ أن " Q " تمثل جزءاً من " P "، أو بالأحرى تقع الجملة الطبيعية التى تعبر " Q " عن صورتها المنطقية بالكامل كجزء من الجملة الطبيعية التى تعبر " P " عن صورتها المنطقية . والسؤال الذى يطرح نفسه هنا هو : لماذا لا يظهر فى الصورة المنطقية للجملة التى تقابلها "P " ما يعبر عن دخول ما يقابل "Q" كجزء منها ؟ وفى هذه الحالة ستكون"P" شيئاً قريباً من : «فى مقدور ديكارت أن يشك فى " Q " »

نحن لا نستطيع أن ننكر العلاقة بين الجملتين، ولكنها علاقة تنتمى إلى طبقة أعمق للصورة المنطقية للجمل، فضلاً عن أن سياقات مثل، يشك فى ... "يعتقد أن ...، يتوهم أن .....، تحتاج دائماً معالجة خاصة.[1] المهم فى

(١) راجع الفصل الأول من الباب الثانى من هذه الدراسة حيث سيميز على أساس دلالى بين دوال الصدق، والدوال التى تسمى أحيانا مفهومية Intensional ، وهى على كل حال تخرج عن نطاق دراستنا الأولية الحالية لأن الجمل المركبة لا تعتمد فى صدقها على صدق أو كذب عناصرها بالمعنى المباشر.

الأمر أن هذا التداخل لا يؤثر على التناول المنطقى للحجة لأننا سنتناولهما كقضيتين منفصلتين بشكل كامل، وهذا ما سيتبين فيما بعد .

المقدمة الأولى : " $P \rightarrow Q$ "

المقدمة الثانية: " $\sim P \rightarrow Q$ "

المقدمة الثالثة: " $\sim R \rightarrow Q$ "

النتيجة : " R "

والمثال كما هو واضح يعبر عن صياغة خاصة لحجة ديكارت الشهيرة فى إثبات الوجود على أساس الفكر . فإذا استبقنا السياق الخاص بدراستنا الحالية، واعتمدنا على اعتبارات نظرية الدلالة التى سندرسها فى الباب التالى، لوجدنا أن الحجة صحيحة كما سنعرف فيما بعد. إلا أن هذا لا يعنى قبولاً تلقائياً للمبدأ الديكارتى الشهير، لأن القبول به يعنى القبول بنتيجته، وقبول النتيجة يحتاج أولاً إلى قبول المقدمات جميعاً، فضلاً عن قبول الصحة المنطقية للاستدلال ، وهذا ما سنبحثة بالتفصيل فى الفصول اللاحقة أما الصورة المنطقية للإستدلال فهى .

$$P \rightarrow Q , \sim P \rightarrow Q , \sim R \rightarrow \sim Q \models R$$

مثال (٣)

«سيختار نبيل لون جدران شقته الجديدة، وسيقوم بطلائها بنفسه فقط إذا وافقت زوجته. وهى بالتأكيد لن توافق، لأنها لا تزال تذكر فشل محاولاته السابقة. لذلك لن يقوم نبيل بطلاء شقته.»

المفتاح :

«يختار نبيل لون جدران شقته» يقابلها P

«يقوم نبيل بطلائها بنفسه» يقابلها Q

«توافق زوجه نبيل» يقابلها R

«تذكر الزوجه فشل نبيل السابق» يقابلها S

هذه هى الوحدات التى سنقوم بتركيب الصورة المنطقية للإستدلال منها، ويتم ذلك كما نعلم على مرحلتين: فى الأولى نقوم بتكوين الصيغ المركبة عن طريق تحديد الثوابت المنطقية المقابلة للروابط اللغوية، وفى المرحلة الثانية نقوم بتحديد النتيجة لنضع صورتها المنطقية بعد ثابت اللزوم، ونضع المقدمات جميعاً قبلها .

الصيغة الأولى :

تحتوى الجملة على رابطين لغويين هما : «الواو»، والتعبير « فقط إذا ». ونحن نعلم أن الواو، تفسر عادة ثبابت الوصل، و«فقط إذا » يقابلها ثابت التضمن على أن يكون مايليها هو تالى التضمن وليس مقدمه . ومع ذلك لا نعلم أى الثابتين هو الثابت الرئيسى لأن السياق ينطوى على التباس بنائى Structural Ambiguity (١)، ولهذا نجد أن الصورة المنطقية للصيغة قد تكون إحدى الصيغتين التاليتين بحسب التفسير الذى نأخذ به للجملة

---

(١) راجع فى هذا الصدد، المزيد من التفصيل حول هذه الظاهرة اللغوية ، وغيرها، الدراسة الهامة لمارك سينزبرى

Sainsbury, R.M (1991), pp . 36 - 38

الأصلية :

$$(a) \quad "P \& (Q \rightarrow R)"$$
$$(b) \quad "(P \& Q) \rightarrow R"$$

ولكى يتضح الفارق بين الصيغتين نقول إنه إذا قبلنا الأولى منهما فإن موافقة الزوجة تكون شرطاً ضرورياً لأن يقوم بطلاء الشقة فقط، دون أن يمتد هذا الى اختياره للون الذى سوف يستخدم فى العملية. أما فى الصيغة الثانية فإن موافقة الزوجة تشمل اختيار اللون أيضاً، أو بالأحرى تشمل الوصل بين الطرفين، ومن ثم فعدم موافقتها طبقاً لهذا الفهم تمنع اجتماع اختيار نبيل للون وقيامه بالطلاء.

الصيغة الثانية :

هذه االصيغة تحتوى على ثابت النفى،الذى يتم به نفى الجملة التى رمزنا لها بالتعبير "R "، ولكنها مرتبطة بالجملة التى رمزنا لها بالرمز "S " عن طريق عبارة " لأن" ونحن لا نريد الدخول الآن فى بحث علاقة الرابطة "لأن" بالثوابت المنطقية لأكثرمن سبب، ولكن أهمها هو أن طبيعة ارتباط "R" بالصيغة " S " لا تعنينا فى سياق الاستدلال الكلى. ولهذا فمن الممكن إهمال هذا الجانب من الصورة المنطقية للجملة، باعتبار " S " منفصله كلياً عن الحجة المنطقية قوة أو ضعفاً .

غير أن هناك فائدة نجنيها من " S " دون حاجة إلى طرحها فى صياغتنا للحجة، وهى أنها تؤسس الدليل على كذب " R " ، مما يجعل من المشروع بالنسبة لنا الاقتصار على الصيغة التالية كصورة منطقية مختصرة دون إخلال بالصورة المنطقية : الصيغة هى : R

الصيغة الثالثة :

هذه الصيغة نفى مباشر للصيغة "Q" ، وهى تمثل النتيجة حسبما نفهم من المضمون العام للإستدلال ، ونظراً لوجود كلمة «لذلك» ، قبلها . أى أن الصورة المنطقية للنتيجة هى: "$\sim Q$"

وبهذا تكون الصورة المنطقية للإستدلال واحدة من اثنتين بحسب التفسير الذى سنأخذ به للمقدمة الأولى . الصورتان المقصودتان هما :

$$P \& (Q \rightarrow R), \sim R \models \sim Q$$

$$(P \& Q) \rightarrow R, \sim R \models \sim Q$$

ويجب ألا نقلل من قيمة الفارق بين المتتابعتين ، فهو هام إلى أقصى حد ، وليس الأمر مثل ماحدث فى المثال السابق فإحدى هاتين المتتابعتين صحيحة منطقياً، والأخرى غير صحيحة، وهذا أمر لن نكون قادرين على تأكيده أو نفيه إلا عندما ننتقل إلى الفصول التالية من هذه الدراسة. المهم أن ندرك الأن أهميته القصوى بالنسبة للنظرية المنطقية ، ولدورها الحاسم فى تقييم الاستدلالات .

مثال (٤)

إذا انضمت الأردن أو العراق إلى المجلس فإن سوريا أو الكويت ستقاطعه . أما إذا انضمت الكويت فإن سوريا أو اليمن ستقاطعه. كل الشواهد تؤكد أن سوريا لن تقاطع المجلس. ولهذا فإذا لم تقاطع المجلس

العراق ولا اليمن فلن تنضم اليه الأردن ولا الكويت (١) .

قبل بيان مفتاح تحويل هذا الاستدلال إلى الصياغة المنطقية ، نشير إلى أننا سنعتبر الجملتين التاليتين متناقضتين :

أ - تنضم الأردن إلى التحالف .

ب - تقاطع الأردن التحالف.

ولاشك أن هذا ينطوى على قدر غير قليل من التجاوز، والذى نرجو ألا يكون مخلاً بدرجة كبيرة . ذلك أننا إذا قبلنا صدق الجملة "أ " كان هذا الموقف ملزما لنا بقبول كذب الجملة "ب" وكذلك الحال إذا قبلنا صدق "ب" وبدرجة معقولة أيضاً فإن القبول بكذب أيهما يؤدى إلى القبول بصدق الآخر . وربما يحسن تجاهل الموقف الذى يمكن أن تتخذه الأردن ، أو غيرها ، وهو الموقف الوسط أو عدم الحسم، أو وضع شروط معينة للإنضمام، وبهذا يتوفر الأساس للرمز الى الجملة الأولى بصيغة، وإلى الجملة الثانية بنفيها .

المفتاح

«تنضم الأردن إلى المجلس»	يقابلها	P
«ينضم العراق إلى المجلس»	يقابلها	Q
«تنضم سوريا»	يقابلها	R
«تنضم الكويت»	يقابلها	S
«تنضم اليمن»	يقابلها	U

---

(١) ليس المقصود بهذا المثال مجلساً معيناً ، وإنما الهدف هو مجرد مثال لبيان كيفية تطبيق الأدوات المنطقية لفهم الاستدلالات وتقييمها وعسى أن يعين المنطق الحديث فى حل بعض اللوغاريتمات العربية !!

وتستخدم الرموز السابقة عوضاً عن الجمل فى تكوين الصيغ المنطقية باستخدام الثوابت المنطقية على النحو التالى بيانه. لاحظ فقط أن الصيغة الرابعة تختصر الكثير من التفاصيل لتضع صورة منطقية للجملة المقابلة لها عبارة عن ما تقرره " R " فقط، أى أن سوريا ستنضم الى المجلس المذكور.

الصيغة الأولى: $"(P \vee Q) \rightarrow (\sim R \vee \sim S)"$

الصيغة الثانية : $S \rightarrow (\sim R \vee \sim U)$

الصيغة الثالثة : R

الصيغة الرابعة : $(Q \,\&\, U) \rightarrow (\sim P \,\&\, \sim S)$

الصورة المنطقية لتتابعة هى :-

$$(P \vee Q) \rightarrow (\sim R \vee \sim S),\ S \rightarrow (\sim R \vee \sim U),\ R \models (Q \,\&\, U) \rightarrow (\sim P \,\&\, \sim S)$$

مثال (٥)

تصور أننا فى المرحلة الأخيرة من انتخابات الرئاسة الأمريكية والمناقشة محتدمة بين المرشحين كلينتون وجورج بوش – ونحن نعرف أن عمر الأخيرحوالى السبعين عاما مما يجعلنا نقرر الشرط التالى :

"إذا فاز كلينتون فى الانتخابات سيتقاعد جورج بوش"

تصور فضلاً عن ذلك أن الأنباء تتواتر عن مرض بوش المفاجئ أثناء الحملة الانتخابية . وفى الوقت الذى يحاول فيه مساعدو بوش إخفاء الحقيقة عن الجماهير حتى لا تنهار الجملة الانتخابية يمكن لنا نحن، باعتبار أن لنا اهتمامات مختلفة، تقرير صدق الشرط التالى :

«إذا توفى جورج بوش يفوز كلينتون فى الإنتخابات.»

والأن نتساءل هل يمكن قبول القضيتين المركبتين فى نفس الوقت كمقدمتين معاً . ربما نتسرع بالاجابة فنقول إنهما صادقتان كلا على حده، ومن ثم لاتوجد مشكلة في التعامل معهما، تماماً ولكن المشكلة تظهر عندما نعاملهما كمقدمتين لاستدلال معين لأن نتيجته تكون على النحو التالى :-

«إذا توفى جورج بوش فإنه سيتقاعد !!»

وأرجو تأجيل اعتراضاتنا على هذا الاستدلال المرفوض بالقطع حتى نرى الصور المنطقية لقضاياه أولاً . والمفتاح يكون على النحو التالى :

المفتاح

«يفوز كلينتون فى الانتخابات»	يقابلها	P
«يتقاعد جورج بوش»	يقابلها	Q
«يتوفى جورج بوش»	يقابلها	R

ومن السهل أن نرى أن الصورة المنطقية للشرط الأول تتمثل فى التضمن التالى : "$P \rightarrow Q$"

أما التضمن الثانى فتاليه هو مقدم التضمن السابق ، ومقدمه هو القضية الثانية، أى أنه يتخذ الصورة التالية : "$R \rightarrow P$"

ومن الطبيعى أن نعبر عن نتيجة الاستدلال بالصيغة التالية : "$R \rightarrow Q$"

ومن ثم تكون المتتابعة الناتجة على النحو التالى :

$$R \rightarrow P , P \rightarrow Q \models R \rightarrow Q$$

ومن المعروف أن إحدى خواص التضمن هى التعدى، أى أن الصيغة

صحيحة منطقياً من الناحية الصورية الخالصة ، ولكن السؤال الجدير بالبحث هو : هل يمثل الإستدلال اللغوى الذى استخرجنا صورته المنطقية الصحيحة بكل المعايير إستدلالاً معقولاً ؟

نقول هنا إن الإجابة على هذا السؤال ليست محل خلاف ، فمن المستحيل أن نقبل نتيجة تقول عن شخص إنه إذا توفى فإنه سيتقاعد ، أما سبب الإضطراب فليس بالطبع هو فساد النظرية المنطقية، أى فساد مبدأ تعدى علاقة التضمن . ولكن المشكلة تعود إلى إختلاف منطق اللغة الطبيعية عن منطق اللغة المنطقية كما أسلفنا .

ولا نقصد هنا أننا أما نسقين مختلفين على وجه الإطلاق، كما ذهب إلى ذلك فيشر مثلاً، بل نقول إن النظامين اللغويين مختلفين. النسق اللغوى المنطقى مجرد وجاف، ولا سبيل إلى أن يؤدى إلى تناقضات بمثل هذه الفجاجة. أما اللغة الطبيعية ولأنها مشحونة كما أسلفنا بمضامين ثقافية وفلسفية وإجتماعية ونفسية معينة فكثيراً ما نجد فيها هذه الأمثلة المحبطة للباحثين عن نظرية منطقية تحكم اللغة الطبيعية بدقة كاملة.

إننا حين نستخدم اللغة الطبيعية نفعل ذلك فى سياق معين، سواء كان اجتماعيا أو قانونيا أو سياسيا، ومن ثم يستحيل علينا إخراج عباراتنا واستدلالاتنا بعيداً عن هذا السياق . وفى هذا الإطار فإن حديثاً عن فوز كلينتون فى الانتخابات فى الشرط الأول يختلف تماماً عن نفس الفوز الذى عبرنا عنه بنفس الكلمات فى الشرط الثانى ، وهذا الاختلاف مما لا نعبر عنه بشكل صريح، وإلا تحول استخدام اللغة فى التعبير عما فى أذهاننا الى

عملية تعذيب للذات والآخرين عن طريق مراعاة تجنب كل المزالق المنطقية المعروفة وغير المعروفة . إن فوز كلينتون فى الجملة الشرطية الأولى مقصود به فوزه على بوش فى معركة انتخابية حقيقية يكون أبسط شروطها أن بوش خاضها حتى النهاية. أما موت بوش الذى يمثل مقدماً للشرط الثانى فهو شرط كافٍ لإعتبار كلينتون فائزاً بالتزكية [١]

مثال (٦)

سأل الملك مبعوثه الشخصى : بمن مررت على الطريق أثناء عودتك ؟

رد عليه المبعوث باقتضاب : لا أحد

عاجله الملك بسرعة قائلاً : هذا صحيح . لقد رأته هذه السيدة أيضاً أثناء حضورها إلى هنا . وأردف الملك : إذن لا أحد يسير أبطأ منك .

تحير المبعوث، وأجاب فى حذر : إننى أبذل قصارى جهدى .. غير أننى على يقين من أنه لا أحد يسير أسرع منى .

وينهى الملك هذا الحوار ويقول : إنه لا يستطيع أن يفعل ذلك، وإلا سيكون قد حضر إلى هنا قبلك .

هذا الحوار الذى ننقله مع شئ من التعديل عن لويس كارول [٢] يكشف عن أهمية ظاهرة عدم الإنتظام التركيبى التى تتحدث عنها هنا . إن

---

(١) نحن هنا نفترض أن الحالة التى نصفها مطابقة للقانون الأمريكى الخاص بالإنتخابات .

(2) Carroll, L. (1898) : Symbolic Logic.

بأنه لايوجد فارق على المستوى التركيبي بين تعبير "لا أحد" وأي أسم علم، أو اسم بشكل عام. واللغة الطبيعية مليئة بالأمثلة التي توضح هذه الظاهرة بشكل حاسم . هناك مثلاً استخدام الضمائر (١) وأسماء الإشارة وظرف الزمان والمكان وغيرها من التعبيرات التى ترتبط بمستخدم معين للجملة وبزمان معين تقال فيه، بل وبمكان معين تقال فيه أيضاً

وكما قلنا مرارا، لا يمكن حسم هذه القضية على مستوى حساب القضايا فقط، لأننا إزاء نظرية منطقية بدائية الى حد بعيد. صحيح أنها ضرورية لبناء النسق المنطقي بالكامل ولكن إشكالية الصورة المنطقية لاتحسم إلا عند إستيفاء بناء جسم النظرية المنطقية الكبرى أولا، ثم بعد ذلك نستطيع أن نرى الأرض تحت أقدامنا بوضوح، وأن نستشرف الإمكانيات المتاحة أمامنا الى حد بعيد.

---

(١) لعل منا من يذكر فى هذا الصدد موقفا كوميدياً فى مسرحية «مدرسة المشاغبين» الشهيرة كان الأساس فيه التلاعب الضمير "أنا" والضمير "أنت" و كان الخلاف بين الممثلين حول من اشترى التورتة.

الباب الثاني
نظرية الدلالة

الباب الثانى

نظـــرية الدلالـــة

قدمنا فى الباب الاول من هذه الدراسة، ضمن ما قدمنا، وصفاً للغة نظرية الإستنباط الأساسية، من حيث مفرداتها، وقواعد تركيب صيغها المختلفة. وفضلاً عن ذلك حاولنا استكشاف علاقة هذه اللغة الصناعية باللغة الطبيعية التى نستخدمها فى حياتنا اليومية العادية. وقد تبين لنا أن اللغة المنطقية المثلى تعتبر بمثابة الهيكل العظمى الأساسى لجسم اللغة الطبيعية، مع مراعاة المبالغة النسبية التى ينطوى عليها إستخدام هذا التشبيه.

أما الخطوة التالية، والتى نخصص لها الباب الحالى، فهى البحث فى دلالة اللغة المنطقية. والمقصود بدلالة اللغة، مبدئياً، هو إشارتها إلى ما هو خارجها، أى صدقها أوكذبها بالنسبة للواقع الخارجى. وصدق الصيغ المنطقية التى تتكون منها لغتنا مشروط بصدق صيغها الأبسط التى تعد بمثابة الوحدات الأساسية التى تتشكل منها. فالصيغ المركبة دوال صدق Functions Truth للمتغيرات الورادة بها على أساس تعريفات الثوابت المستعملة فى ربط هذه المتغيرات.

وعلى أساس مفهوم الصدق المطبق على الصيغ المركبة نقوم بتصنيف هذه الصيغ إلى أنواع ثلاثة هى: الصادق منطقياً، والمتسق، وغير المتسق بما لهذا التصنيف من نتائج بالغة الأهمية. وفى تطبيق آخر نثبت كفاءة اللغة المنطقية المختارة أى قدرتها على التعبيرعن كل احتمالات الصدق والكذب

الخاصة بالمتغيرات الواردة فى أى صيغة مركبة وبعبارة أخرى نثبت قدرة المصطلح الرمزى المختار للتعبير عن كل الدالات الممكنة بالنسبة لعدد معلوم من المتغيرات.

أما أهم الموضوعات التى نبحثها فى هذا الباب فهو موضوع الصحة المنطقية، وهو يتعلق بالشروط الدلالية التى تكفل لنا انتقالاً مشروعا من المقدمات إلي النتيجة في كل إستدلال نقوم به. ولهذا السبب نخصص له فصلاً مستقلاً من هذا الباب. ويرتبط به مفهوم الاتساق الذي نقدم تعريفا له على أسس دلالية أيضاً.

إن جوهر نظرية الدلالة Semantics هو الصحة المنطقية، وهو أحد جناحى نظرية اللزوم المنطقى Logical Consequence، وهو المعروف باللزوم الدلالى Logical Consequence or Entailment. أما الجناح الآخر لنظرية اللزوم فهو اللزوم الإشتقاقىDerivational Entailment أو نظرية البرهان Proof Theory ، ونخصص له الباب الثالث من الدراسة. ولا شك أن واحدة من أعظم إنجازات المناطقة في القرن العشرين هى إثبات تكافؤ هذين اللزومين، بمعنى أن كل لزوم دلالى صحيح هو لزوم إشتقاقى صحيح أيضاً، والعكس بالعكس.

ونظرية الدلالة التى نهتم بها فى هذا الباب ليست النظرية العامة التي تحتاج إلى دراسة منفصلة أكبر بكثير من تلك التى بين أيدينا، ولكنها نظرية الدلالة الأساسية، وهذه النظرية مطبقة على حساب القضايا فقط. وهذا يعنى أن مفهوم الصدق والصحة المنطقيين أوسع نطاقاً عما نطبقه هنا بكثير، ولكنه يعتمد عليه بصورة كاملة، ويطوره بإضافة إعتبارات جديدة من

خلال تبين إستدلالات جديدة تقوم على التركيب الداخلى للقضايا التى أخذناها هنا كقضايا منفصلة لاتحتمل إلا الصدق أو الكذب ولا تدخل مع جاراتها إلا فى علاقات دالات الصدق Truth functional.

الفصل الأول من هذا الباب نعرض فيه نظرية الصدق المنطقى، وفى الفصل الثانى نعرض نظرية الصحة المنطقية والإتساق. ويمكن من وجهة النظر العامة رد الأول إلى الثانى باعتبار أن الصدق المنطقى حالة خاصة من حالات الصحة المنطقية. والسبب فى ذلك أن الصيغة الصادقة منطقياً تعتبر متتابعة منطقية صحيحة وعدد مقدماتها يساوى صفراً. غير أننا نغلب عنصر التبسيط فى تقديمنا لمفهوم الصدق المنطقى أولا، وبعد ذلك نعمم النتائج التى توصلنا إليها، ونربط مفهوم الصحة بمفهوم الاتساق المنطقى، ولعل هذا يذكرنا بما قلناه فى التقديم لهذه الدراسة بمناسبة الحديث عن تعريف المنطق.

الفصل الأول

الصدق المنطقي

الفصل الأول
الصـــدق المنطقـــى

البداية تكون من خلال الإقرار بكلاسيكية النظرية المنطقية التى بين أيدينا. والمنطق يسمى كلاسيكياً حين يوضع فى مقابل المنطق غير الكلاسيكى Non- Classical. والمقصود بالأخير تلك النظرية المنطقية التى تختلف فى جانب أو آخر عن المنطق الكلاسيكى بما يشكل خروجاً أساسياً عليه. وكلاسيكية المنطق من ناحية نظرية الدلالة تتمثل فى إقراره بقمتين فقط للقضايا التى تدخل فى نطاقه. إن كل الصيغ المنطقية سواء البسيطة أو المركبة تعبر فى المنطق الكلاسيكى عن قضايا لا تحتمل إلا أحد أمرين: الأول أن تكون صادقة، والثانى أن تكون كاذبة.

خذ أحد المتغيرات وليكن " P" هذا المتغير يدل علي قضية إما أن تكون صادقة، فنعبر عن هذا بالرمز "T"، وأما أن تكون كاذبة، فتعبر عن هذا بالرمز "⊥". أما الصيغ المركبة فلا تحتمل بناء على هذا وبمساعدة تعريفات الثوابت، التى سنعرض لها بعد حين، إلا أن تكون إما صادقة أو كاذبة أيضاً.نشير هنا فقط إلى أن المنطق غير الكلاسيكى ينكر هذا المبدأ الجوهرى. هناك من يقدم منطقاً ثلاثى القيم، وهناك منطق رباعى القيم، ومن يقدم منطقاً ذا سلم قيمى متدرج في ابتعاده أو اقترابه من الصدق أو الكذب الكاملين غير أن هذه القضايا تخرج عن اهتمامنا التفصيلى فى هذه الدراسة، وربما نعود اليها بصورة سريعة فى مواضع أخرى.

منطقنا إذن كلاسيكى، أى ثنائى القيم Two Valued. خذ القضية " القاهرة تقع على النيل ". هذه قضية صادقة، وبالنسبة لمن يجهل صدقها لا تحتمل سوى قميتين أن تكون "T"، أو تكون" ⊥"، وهذا حسبما يقتضى به الواقع الخارجى. أما القضية التى تقول: « الأسكندرية تقع على البحر الأحمر »، فكاذبة لأن الأسكندرية، فى الواقع تقع على البحر المتوسط، وليس الأحمر. المبدأ الحاكم فى المنطق الكلاسيكى هو أن كل القضايا البسيطة لا تحتمل إلا أحد هذين الأمرين، ولهذا فالقضايا التى يتم تكوينها بواسطة الثوابت المعروفة من هذه القضايا البسيطة عبارة عن دالات صدق محددة المعنى، أى محددة الدلالة. ومعنى ذلك أن شروط صدقها واضحة وتستند الى قيم صدق القضايا الداخلة في تركيبها.

نحن هنا نتجاهل أن بعض القضايا غامضة لأسباب متعددة. خذ مثلاً القضية "المنصورة مدينة كبيرة"، والقضية "شبين الكوم مدينة كبيرة". فدلا نختلف كثيراً حول قيمة صدق القضية الأولى. أما القضية الثانية فهناك بالتأكيد من يعتقد أن من حقه إنكار صدقها على الأقل إذا قورنت بالقاهرة مثلاً. غير أننا من الصعب من جهة أخرى إعتبار شبين الكوم مدينة صغيرة. المشكلة هنا أن أوصافاً مثل "كبير"، "صغير"، و "طويل" و "قديم" تحتمل فى بعض الأحيان الشك فى صحة نسبتها الى موضوع معين. فيصعب مثلاً أن نقرر ما هو الطول الذى عنده بالضبط يصبح وصفنالمحمد مثلاً بأنه طويل كاذباً، ووصفنا له بالقصر صادقاً. وهنا يكون الحل عند بعض المناطقة بأن نقدم قيمة (وأحياناً قيم) صدق وسيطة أو إضافية، وهذا مالن نعرج عليه الآن.

نعود إلى قضيتنا "القاهرة" تقع علي النيل"، و "الأسكندرية تقع على البحر الأحمر" لنجد أن نظرية الدلالة تستطيع أن تحدد لنا قيمة صدق أى قضية مركبة تدخلان فيها سواء وحدهما أو مع قضايا أخري قيم صدقهامحددة. المهم أننا لا نهتم بهذه القضايا بعينها، بل بصورتها المنطقية، فنرمز للأولى بالرمز" P"مثلاً، وللثانية "Q". نعلم أن الأولى صادقة والثانية كاذبة، ولكن النظرية تهتم بشروط الصدق التى تنطبق على الصيغ الداخل فيهاهذه المتغيرات بغض النظر عن صدقها أو كذبها بحيث يحدد لنا التعريف قيم صدق المركب فى كل حالات صدق المتغيرات.

الخطوة التالية هى بيان تعريفات الثوابت من حيث هى دوال صدق لمتغيراتها، ثم ننتقل إلى معالجة تمهيدية لأسلوب قوائم الصدق الذى يعطينا شروط صدق الصيغ المركبة جميعاً بناء على نفس فكرة دالات الصدق لننهى ببعض التطبيقات التى تكشف لنا عن فكرة الصدق المنطقى وكذلك محاولة للإجابة عن مدى كفاية الثوابت التى يوفرها مصطلحنا الرمزى للتعبير عن دالات الصدق الممكنة. أما الفصل التالى فمخصص للتقييم المنطقى للمتتابعات بطرق مختلفة وللبحث فى مفهوم الصحة المنطقية للاستدلالات.

ا - الثوابت المنطقية كدالات صدق

الثوابت المنطقية التى قدمناها في الباب الأول هى رموز لربط المتغيرات لتكوين صيغ أكثر تركيباً، ونسمى الصيغ الناتجة دالات صدق Truth. Functions فقط وإذا فقط إذا ساهمت بصورة محددة مع قيم صدق المتغيرات فى تحديد القيمة النهائية للصيغة المركبة.

ولنبدأ بالنفى، فالصيغة "P ~" تعتمد على مكونين : الأول هو

المتغير "P" الذى يرمز إلى قضية تحتمل الصدق أو الكذب، ولهذا فالقضية "P" تحتمل القيمتين الموضحتين بالقائمة التالية ولا ثالث لهما، وهنا تكمن كلاسيكية النظرية المنطقية المعروضة بين أيدينا :

P
T
⊥

وثابت النفى يغير من قيمة صدق المتغير الأصلى، فإذا كانت القضية الأصلية صادقة كان نفيها كاذباً، وإذا كانت كاذبة كان نفيها صادقاً، وهذا ما تقوله القائمة التالية :–

P	~P
T	⊥
⊥	T

فى العمود الأيسر وضعنا كل قيم "P" الممكنة، وهى الصدق والكذب، وفى العمود الثانى طبقنا تعريف النفى المشار إليه. ونلاحظ أن القيمة التى يأخذها المتغير "P" هى نقيض القيمة التى يأخذها نفيه، وهكذا نقول إن القضية ونفيها لا يصدقان معا، ولا يكذبان معاً.

أما ثابت الوصل فنحن نؤكد به صدق قضيتين معاً، فإذا كذبت إحدهما علي الأقل كذب الوصل. وقبل أن نوضح قائمة الصدق الخاصة بهذا

الثابت نلاحظ أننا بحاجة إلى عدد أكبر من السطور لبيان الحالات التالية :-

١- حالة صدق طرفى الوصل معاً.

٢- حالة صدق الطرف الأول وكذب الثانى.

٣- حالة كذب الطرف الأول وصدق الثانى.

٤- حالة كذب طرفى الوصل.

ولذلك عند تصميم قائمة الصدق الخاصة بهذا الثابت نراعى أن نعبر عن كل حالة من هذه الحالات في سطر خاص ثم نحدد في عمود إضافى قيمة صدق القضية المركبة (الوصلية في حالتنا هذه) بناء على تعريف الثابت. القائمة الخاصة بالمركب "P & Q" تظهر كما يلى :-

P	Q	P & Q
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥

ننظر إلى العمودين الأولين باعتبارهما وحدة واحدة. فكل سطر يعبر عن حالة صدق من الحالات الأربع التى أشرنا إليها. ونلاحظ أن الوصل يصدق فى حالة واحدة فقط وهى الحالة الأولى، أى صدق طرفى المركب الوصلى معاً، ويكذب فى بقية الحالات. وهكذا نعرف الوصل دلالياً بأنه ذلك الثابت الذى يصدق فى حالة صدق طرفيه معاً، ويكذب فى غير ذلك، وبعبارة

أخرى هو ذلك الثابت الذى يكذب فى حالة كذب أحد طرفيه على الأقل ويصدق فى غير ذلك.

أما القضية الفصلية P v Q ، فنحن نطبق في هذا النسق المعنى الأضعف وهو الفصل غير الإستبعادى الذى بموجبه تصدق القضية المركبة فى حالة صدق أحد طرفيها على الأقل، وتكذب فى غير ذلك، أو هى القضية التى تكذب فى حالة كذب طرفيها معاً وتصدق فى غير ذلك. وقائمة الصدق تبدو كما يلى :-

P	Q	P v Q
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

وتوضح القائمة أن ثابت الفصل يصدق فى حالات ثلاث ويكذب فى حالة وحيدة وهى الموضحة فى السطر الأخير من القائمة. وبمقارنة سريعة مع ثابت الوصل نلاحظ أن شروط صدق الوصل أقسى بكثير من شروط صدق الفصل، وبنفس المعنى نجد أن شروط كذب ثابت الفصل أقسى بكثير من شروط كذب الفصل.

أما القضية التضمنية، ومثالها P → Q ، فتصدق فى حالة صدق

التالى أو فى حالة كذب المقدم بغض النظر عن موقف المتغير الآخر من الصدق أو الكذب، وتكذب فى غير ذلك من الحالات. وبعبارة أخرى تكذب القضية التضمنية فى حالة صدق مقدمها وكذب تاليها معاً، وتصدق فى غير ذلك من الحالات، وهذا ما توضحه القائمة التالية :-

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	T
⊥	⊥	T

ونلاحظ أن القائمة تقضى بكذب حالة وحيدة، وهى الحالة التى يصدق فيها المقدم ويكذب التالى. المهم فى ثابت التضمن أن صدقه يمنع هذا الإحتمال فقط، وكذبه لا يعنى إلا أن يكون هذا الاحتمال متحققاً. ولعلنا لا نجد مشكلة فى الاتفاق حول السطرين الأولين من القائمة السابقة. السطر الأول يقرر أن التضمن صادق لأن مقدمه صادق، وتاليه صادق، أو أن التالى صادق لأن التضمن صادق والمقدم صادق. أما بالنسبة للسطر الثانى ففيه يكون التضمن كاذباً لأن المقدم صادق والتالى كاذب، وهذا ما ينفى وجود علاقة التضمن بينهما.

أما السطران الأخيران فكانا دوماً مصدر إزعاج وخلاف بين المناطقة

طوال تاريخ المنطق (١) فطبقاً لهذا التعريف تكون القضايا المركبة التالية صادقة، وهو ما يتعارض كثيراً مع فهمنا العادى للجمل الشرطية :

- إذا كانت القاهرة عاصمة ليبيا فإن الخرطوم عاصمة السودان.
- إذا كانت القاهرة عاصمة ليبيا فإن الخرطوم عاصمة تونس.

ليس هناك جدال فى أن الاستخدام العادى للغة يتعارض مع اعتبار القضيتين المركبتين السابقتين صادقتين، إلا أنه بما أن المقدم فى الحالتين قضية كاذبة، فقائمة الصدق تلزمنا باعتبار المركب صادقاً. ويكفى أن نؤكد هنا أن تعريف التضمن يمنع اجتماع صدق المقدم وكذب التالى وهذا هو المهم بالنسبة لهذا الجانب، مع التسليم بأننا نضحى قليلاً (أو كثيراً من وجهة نظر أخرى) بالاقتراب المرغوب من الاستخدام العادى للغة الطبيعية(٢). غير أننا لا نعدم عبارات قريبة فى معناها من هذا الاستخدام مثل :-

- لوكنت مليونيراً لوزعت أموالى على الفقراء.
- لوكان ماركس حياً إلى اليوم لتنكر لنظرية الشيوعية.

ننتقل إلى دالة التكافؤ ومثالها "$P \leftrightarrow Q$" ، والمركب يصدق فى حالة اتفاق طرفيه فى قيمة الصدق سواء بالكذب أو الصدق، ويكذب فى حالة اختلافهما، وهذا ما توضحه القائمة التالية:-

---

(١) راجع رسالتنا للماجستير التى خصصت فى قسم كبير منها لرصد الجدال الذى دار بين مدارس المنطق المختلفة، على مدى تاريخ الدراسات المنطقية الطويل حول تفسير معنى التضمن وصلته باللزوم أو الاستدلال بشكل عام.

(٢) راجع مناقشتنا لقضية العلاقة بين ثابت التضمن وأدوات الشرط المستعملة في اللغة العربية في الباب الأول، وهذا فى إطار بحث العلاقة بين الثوابت المنطقية والروابط اللغوية المناظرة لها.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	⊥	⊥
⊥	T	⊥
⊥	⊥	T

وتوضح القائمة أن هناك حالتين يصدق فيهما الثابت وهما الأولى والرابعة، وحالتين يكذب فيهما، وهما الثانية والثالثة. ويعرف التكافؤ أحياناً بالتضمن المتبادل، أى أنه يقرر أن الطرف الأول يتضمن الثانى وفى نفس الوقت يتضمن الثانى الأول. وهذا سبب كذب السطرين الثانى والثالث، ذلك أن السطر الثانى يمثل حالة كذب التضمن الأول، والسطر الثالث يمثل حالة كذب التضمن الثانى.

أما ثابت التناقض أو الكذب فهو كما نعلم، وكما يظهر من الإسم الذى أعطيناه له لا يصدق إطلاقاً، ويكذب دائماً، وهو لا يربط بين متغيرات، بل إنه يسلك سلوك المتغير، أو الصيغة. وفى مقابل هذا نجد ثابت الصدق الذى يصدق دائماً. ،كما ذكرنا آنفاً لن نستخدم هذا الثابت فى نسقنا على الإطلاق، أما ثابت الكذب أو التناقض فسيتم توظيفه جزئياً، وخاصة فى علاقته بثابت النفى.

انتهينا من تعريف الثوابت المستخدمة فى لغتنا المنطقية، وليس معنى هذا أن هذه هى الثوابت الوحيدة التى تمثل دالات صدق لمتغيرات تربط

بينهـا هذه الثـوابت. ذلك أن لدينا ست عـشـرة طريقـة مـخـتلفـة يمكن بواسـتطها المتـغـيرين أن يرتبطا ببعضـهـما، وكلها دالات صدق مـختلفة. سنتـوقف عند هـذا الأمـر بعـد صـفـحـات قليلة، وسنبين أن الثـوابت التى نستخدمـها كافية جداً للتعبير عما نريد، أى للتعبير عن الست عشرة دالة أو علاقة مختلفة بين المتغيرات. بل سنجد أن اثنين منهم على الأكثر كافيان من حيث الدلالة للتـعـبيـر عن كل العـلاقـات المنطقـيـة التـى يمكن أن تقـوم بين المتغيرات.

بقى أن نشير إلى أن هناك ثوابت أخرى لا نهتم بها هنا على الإطلاق، لأننا بصدد معالجة دالات الصدق فقط. خذ مثلاً القضية:-

يعتقد محمد أن «اليوم هو الثلاثاء».

هذه القضية مركبة من الدالة:

«يعتقد محمد أن ....»

والقضية البسيطة:

«اليوم هو الثلاثاء»

ولكن المركب منهما يخرج عن موضوعنا إطلاقاً لأنه لا علاقة ضرورية بين صدق القضية البسيطة - «اليوم هو الثلاثاء» وبين القضية المركبة التى تقرر إعتقاد محمد بصدقها. قد تكون إحدها صادقة أو كاذبة دون أن يؤثر ذلك على كذب أو صدق الأخرى، وبذلك لا تكون الأخيرة دالة صدق للأولى. وهناك أمثلة أخرى على مثل هذه القضايا التى تخرج عن مجال اهتمامنا (١)

---

(١) هناك العشرات، بل المئات، من الدراسات الغربية حول هذا الموضوع ضمن المشروع الفلسفى التحليلى لاكتشاف منطق اللغة، وبيان دلالاته الفلسفية. ومن بين أفضل المعالجات المتاحة، والتى=

هنا منها:-

- يحدونى الأمل فى أنه إذا سأل المريض الطبيب عن حقيقة مرضه سيكون الطبيب قادراً على إبلاغه بلباقة.
- من الضرورى أن يكون عدد كواكب المجموعة الشمسية تسعة.
- أعلم أن محمد هو صاحب أعلى الدرجات فى الأمتحان الأخير.

وهذا لأن الدالات «يحدونى الأمل فى أنه ....» و«من الضرورى أن ....» و«أعلم أن ....» ليست دالات صدق، وإنما هى دالات مفهومية Intensional ، ومعنى ذلك أنه لا توجد علاقة مباشرة بين صدق أو كذب القضايا الداخلية، وصدق أو كذب المركب الناتج من إضافة الدالات المشار إليها. وهذا على عكس دالات الصدق التى يقوم تعريفها على تحديد قيم صدق معينة لكل حالة من حالات صدق أو كذب القضايا الداخلة فيها.

٣- قوائم الصدق

حددنا فى القسم السابق تعريفات الثوابت المنطقية جميعاً، أى الشروط التى تصدق بموجبها المركبات التى يتم تكوينها بواسطة هذه الثوابت. ويمكن استخدام هذه التعريفات الأساسية فى بيان شروط صدق أو تعريفات الصيغ المنطقية جميعاً عن طريق استخدام قوائم الصدق.

فقوائم الصدق، إذن، أسلوب مباشر وبسيط لاختبار صدق أى صيغة منطقية مهما بلغت درجة تعقيدها، عن طريق تحديد الحالات التى تصدق فيها والحالات التى تكذب فيها على أساس قيم المتغيرات الداخلة فى تكوين

= تعد مدخلاً جيداً للنقاش الدائر حول هذا الموضوع الهام هناك مقالة كواين الشهيرة:
Quine, W. (1961), pp. 139 - 159.

الصيغة فضلاً عن التعريفات المحددة لكل ثابت، والتى تطبق على المتغيرات التى تقع فى نطاق تأثيره، وبترتيب محدد طبقاً للشجرة التركيبية للصيغة، بحيث يبدأ من الثوابت ذات النطاق الأضيق لينتهى بالثابت الرئيسى.

وأول من عرف قوائم الصدق البسيطة للثوابت كان الميغاريون والرواقيون (١). وفى العصر الحديث كان تشارلز بيرس الذى تجاوز انجاز الميغاريين والرواقيين خطوة أخرى. أما فى القرن العشرين فنجد فتجنشتين وبوست وغيرهما قد وضعوا قواعد أسلوب قوائم الصدق بالتفصيل (٢)، ونشير بصفة خاصة إلى فتجنشتين الذى أعطى لهذا الأمر قيمة فلسفية عظمى يخرج البحث فيها عن نطاق هذه الدراسة. (٣)

ولقوائم الصدق تطبيقات متنوعة يصعب حصرها فى سطور قليلة، ولذا نفضل استكشافها بالتدريج مع تطور الدراسة الحالية، وقبل ذلك نقدم وصفاً للأسلوب وأمثلة متنوعة للتدريب على استخدامه. إن ما يلزمنا لتصميم قائمة صدق لأى صيغة منطقية هو ثلاثة عناصر تتكامل لتوضيح الحالات التى تصدق فيها الصيغة والحالات التى تكذب فيها. هذه العناصر هى:-

١- تحديد حالات صدق وكذب متغيرات الصيغة. وهذا يتوقف على عدد المتغيرات. فإذا كان لدينا متغير واحد لوجدنا حالتين فقط، وهما حالة

(١) لمزيد من التفصيل راجع رسالتنا للماجستير، الفصل الثانى، والفصل الثالث.

(٢) يذكر تشيرش أن فريجة Frege طبق هذا الأسلوب بصورة محددة. أما اكتمال هذا الأسلوب فتم على يدى لوكاشيننتش وبوست وفتجنشتين. راجع:

Church, A. (1956): pp. 161 - 162.

(٣) راجع الرسالة المنطقية لافلسفية بدءاً من العبارة رقم (٥). ولمزيد من التفصيل والتعليق راجع الفصل الرابع من

Fogelin, R. (1976).

صدق المتغير، وحالة كذبه. وإذا كان لدينا متغيران فالحالات تكون أربعاً، على النحو الذى تبين فى القسم السابق. أما إذا كان لدينا ثلاثة متغيرات نجد أننا أمام ثمانية حالات وهى عبارة عن الحالات الأربعة السابقة مكررة مرتين، أو مضروبه فى ٢ على أساس أن للمتغيرين معاً أربع حالات والمتغير الثالث يضاعف العدد من حيث أنه توجد حالات أربع يصدق فيها وحالات أربع يكذب فيها هذا المتغير. وبهذا تستنفذ كل الحالات الممكنة من تآليف الصدق والكذب بالنسبة للمتغيرات.

والقائمة [١] تكون على النحو التالى:-

م	المتغير الأول	المتغير الثانى	المتغير الثالث
١	صادق	صادق	صادق
٢	صادق	صادق	كاذب
٣	صادق	كاذب	صادق
٤	صادق	كاذب	كاذب
٥	كاذب	صادق	صادق
٦	كاذب	صادق	كاذب
٧	كاذب	كاذب	صادق
٨	كاذب	كاذب	كاذب

(١) لكى نضمن توزيعاً لقيم الصدق يستوعب كل الحالات الممكنة نقسم عدد الحالات على ٢ ونعطى للمتغير الأول الناتج مرة بالقيمة «صادق» ومرة بالقيمة «كاذب» بالترتيب. نقسم العدد الناتج على ٢مرة أخرى ونعطى القيمة «صادق» (أى T) بعدد الناتج ثم القيمة «كاذب» بنفس العدد للمتغير الثانى، وتكرر العملية نفسها. بالنسبة للمتغير الثالث نقسم الناتج الأخير على ٢ ونعطى قيمة الصدق ثم الكذب بالتبادل بنفس العدد الناتج. وبالنسبة للمتغير الرابع والخامس ... الخ نقوم بنفس العملية، وبهذا نجد أن كل الحالات الممكنة ممثلة لدينا فى القائمة.

وفى حالة الصيغة التى تحتوى على أربعة متغيرات تضرب العدد ٢X٨ لتصل إلى ١٦ حالة لتآليف الصدق والكذب الخاصة بالمتغيرات. وبصفة عامة نقول أن عدد الحالات (ع) يساوى العدد «٢» مضروباً فى نفسه بعدد المتغيرات الورادة فى الصيغة، أى بما يساوى «ن» من المرات، ونعبر عن هذا عادة بالقانون التالى:

$$ع = ٢^{ن}$$

٢- تساعدنا عملية تحديد الحالات الخاصة بصدق وكذب المتغيرات على تحديد عدد سطور القائمة، وهنا نلجأ الى العنصر الثانى وهو تعريفات الثوابت، ويتم تطبيق تعريف كل ثابت على المتغيرات المناسبة له. التعريفات التى حددناها فى القسم السابق ملزمة فى هذا الصدد، ويتم تطبيق تعريف واحد فى عمود منفصل. العمود الأول (من اليسار) يتم فيه تحديد الحالات، ومن ناحية أخرى نجد أن عدد السطور يتحدد بعدد المتغيرات وفقاً للقانون الذى ذكرناه. الحالة هى مجموعة قيم الصدق التى نعطيها للمتغيرات مأخوذة معاً. إننا سنضم القيم التى تأخذها المتغيرات ونعتبرها عموداً واحداً بشكل دائم بحيث تشكل قيم المتغيرات فى كل سطر من هذا العمود حالة فريدة من الصدق والكذب الخاصة بالمتغيرات. أما الأعمدة التى تلى العمود الأول فيتم فيها تطبيق تعريفات الثوابت على التغيرات والصيغ المناسبة بواقع ثابت واحد فى كل عمود.

٣- يلزمنا الى جانب تحديد الحالات وتعريفات الثوابت أن يكون واضحاً لدينا الشجرة التركيبية للصيغة، فهى تصور لنا الكيفية التى تم بها تكوين الصيغة. وهذا ينعكس على ترتيب تطبيق تعريفات الثوابت، بحيث نبدأ

بتطبيق تعريفات الثوابت ذوات المجال الأضيق، وهى الثوابت التى يتم تركيب الصيغ الجزئية على أساسها أولاً، ونصل فى النهاية الى الثابت الرئيسى فى الصيغة وهو الثابت الذى يظهر فى المرحلة الأخيرة من تكوين الصيغة، والقيم التى نضعها تحت هذا الثابت تمثل تعريف الصيغة.

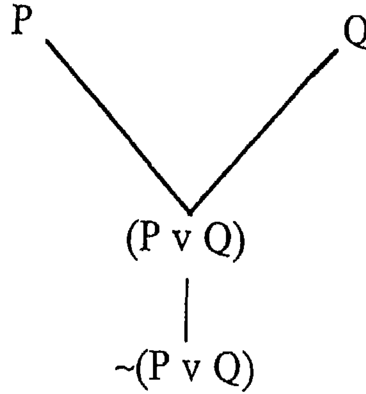
ولهذا يفضل عند اختبار شروط صدق صيغة شديدة التعقيد وضع الشجرة التركيبية للصيغة أمامك على أساس أن تقوم بخطوات تكوين قائمة الصدق على هديها. هذا بالإضافة إلى تحديد عدد المتغيرات اللازمة للوقوف على عدد السطور، وعدد الثوابت لاستخراج عدد الأعمدة. والآن نعرض بعض الأمثلة المتدرجة لتوضيح كيفية تطبيق قوائم الصدق على الصيغ المختلفة.

مثال (أ)

صمم قائمة صدق لتحديد الحالات التى تصدق فيها الصيغة التالية، وكذلك الحالات التى تكذب فيها:-

$$\sim(P \lor Q)$$

نلاحظ أولاً أن القضية تحتوى على متغيرين فقط، هما "P" و "Q" مما يعنى أن السطور ستكون أربعة. كما نلاحظ أن الصيغة تحتوى على ثابتين هما الفصل والنفى على أساس أن صيغة الفصل تنشأ أولاً بين المتغيرين، وبعد ذلك يتم نفى الناتج، وهذا ما تعبر عنه الشجرة التركيبية التالية:



وهذا يعنى أن الثابت الرئيسى فى الصيغة هو النفى الذى نطبق تعريفه على ناتج تطبيق تعريف الفصل على النحو الذى يظهر فى قائمة الصدق البسيطة التالية:–

P	Q	P v Q	~ (P v Q)
T	T	T	⊥
T	⊥	T	⊥
⊥	T	T	⊥
⊥	⊥	⊥	T
(١)		(٢)	(٣)

فى العمود رقم (١) رتبنا حالات الصيغة الممكنة أى وضعنا كل الاحتمالات الخاصة بصدق وكذب متغيراتها. فى العمود الثانى طبقنا تعريف الفصل على كل حالات الصيغة لنجد ثلاث حالات صدق، وحالة كذب واحدة. فى العمود الثالث طبقنا تعريف النفى على قيم العمود الثانى، بحيث تقلب كل قيمة صدق T الى القيمة ⊥ ، والعكس صحيح. ونستطيع أن نقول عن

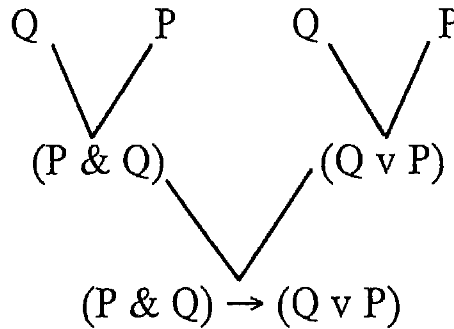
هذه الصيغة إن الحالة الوحيدة التى تصدق فيها هى حالة كذب كل من "P" و "Q" ، وتكذب فى حالة صدق أحدهما على الأقل. (١)

مثال (٢)

حدد الحالات المختلفة التى تصدق فيها القضية المركبة التالية، وكذلك الحالات التى تكذب فيها:

$$(P \& Q) \rightarrow (Q \vee P)$$

هذه الصيغة أعقد قليلاً من السابقة، ولنبحث معاً كيف يمكن تصميم قائمة الصدق الخاصة بها. أولاً تحتوى الصيغة على متغيرين، أى أن هناك أربع حالات صدق خاصة بها لا أكثر ولا أقل، وسنطبق تعريفات الثوابت عليها. بعد ذلك، نلاحظ أن هناك ثلاثة ثوابت، أى أننا نحتاج الى ثلاثة أعمدة لنصل فى النهاية الى قائمة الصدق الكاملة. أما الشجرة التركيبية التى سنوضحها الآن فتبين ترتيب تطبيق تعريفات هذه الثوابت.



(١) يشير بعض الباحثين الى هذه الدالة برمز مستقل هو "↓" ، وهى تعنى الإنكار المزدوج لطرفى الدراسة، وتقابل الرابطة "..... neither ..... nor" فى اللغة الانجليزية. وجدير بالذكر أن أول من استخدم هذه الدالة فى تعريف النفى والوصل والفصل، كان المنطقى شيفر Sheffer . لمزيد من التفصيل حول هذا الأمر، راجع:

Quine, W. (1940), pp. 45 - 49.

الثابت الرئيسى فى الأخرى هو التضمن الذى نصل اليه بعد تطبيق ثابت الوصل فى ناحية، ثم ثابت الفصل فى الأخرى، وبذا نحتاج الى ثلاثة أعمدة فضلاً عن العمود الذى نحدد فيه حالات الصيغة. والقائمة تكون على الوجه التالى:-

P	Q	P & Q	Q v P	(P & Q) → (Q v P)
T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T	T
⊥	⊥	⊥	⊥	T
(١)		(٢)	(٣)	(٤)

نلاحظ هنا أن قيم صدق الثابت الرئيسى هى الصدق (T) فى الحالات الأربعة الخاصة بالمتغيرات، ولا يكذب الثابت فى أى حالة على الاطلاق، ونقول هنا ان الصيغة المذكورة تصدق مهما كانت قيم متغيراتها. إن هذا أمر له دلالته التي نفضل أن نترك البحث فيها مؤقتاً، وسنعود إليها بعد صفحات قليلة.

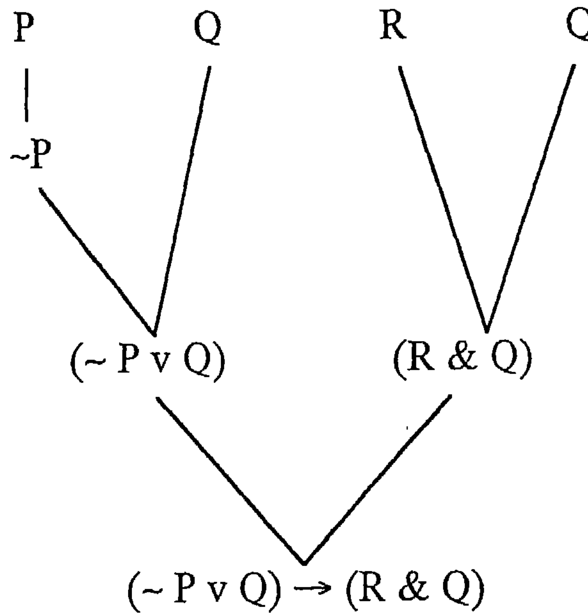
مثال (٣)

حدد شروط صدق الصيغة التالية باستخدام أسلوب قوائم الصدق:

$$(\sim P \vee Q) \rightarrow (R \,\&\, Q)$$

تحتوى الصيغة على ثلاثة متغيرات، هى"P" ، و "Q" ، و "R" ،

ومن ثم يكون لدينا ثمانية سطور تمثل حالات المتغيرات التى توضع دائماً فى العمود الأول. تحتوى الصيغة على أربعة ثوابت مما يعنى أن لدينا أربعة أعمدة إضافية نطبق فى كل منها تعريف ثابت واحد، وبالترتيب الذى تقضى به الشجرة التركيبية التالية:



الثابت الرئيسى كما نرى هو التضمن الذى نطبق تعريفه فى العمود الأخير. والبداية تكون بتطبيق النفى على "P" فى العمود الثانى، ثم الفصل بين نفى "P" و "Q" فى العمود الثالث، أما العمود الرابع فالوصل "R" و "Q" . وبعد ذلك نطبق تعريف التضمن فى العمود الخامس على القيم الموجودة فى العمودين الثالث والرابع. وهذه هى القائمة الكاملة:

P Q R	~ P	~ P v Q	R & Q	(~ P v Q) → (R & Q)
T T T	⊥	T	T	T
T T ⊥	⊥	T	⊥	⊥
T ⊥ T	⊥	⊥	⊥	T
T ⊥ ⊥	⊥	⊥	⊥	T
⊥ T T	T	T	T	T
⊥ T ⊥	T	T	⊥	⊥
⊥ ⊥ T	T	T	⊥	⊥
⊥ ⊥ ⊥	T	T	⊥	⊥
(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)

تحتوى قائمة الصدق على ثمانية حالات تقضى شروط صدق الصيغة بصدقها فى أربع منها وكذبها فى أربع أخرى، وهذا واضح فى العمود الخامس من القائمة، والذى يعد بمثابة تعريف للصيغة، أى بمثابة تحديد لشروط صدقها وكذبها.

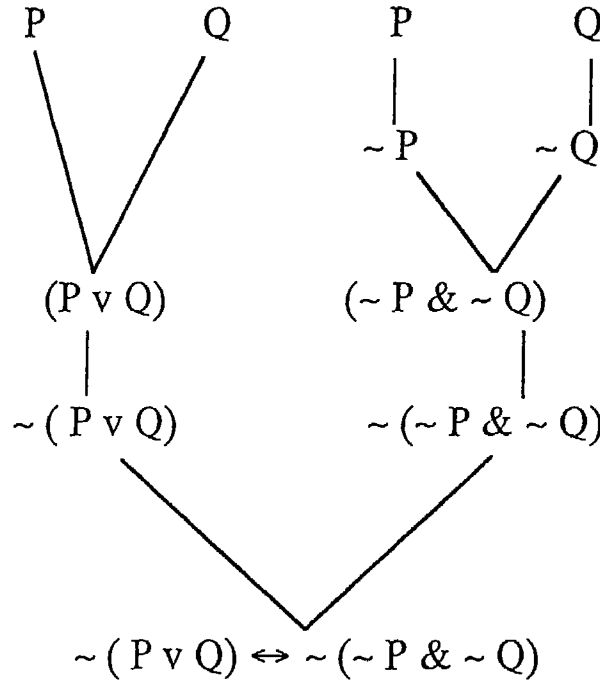
مثال (٤)

حدد شروط صدق الصيغة التالية :

$$\sim (P \vee Q) \leftrightarrow \sim (\sim P \,\&\, \sim Q)$$

تحتوى الصيغة على متغيرين فقط مما يعنى أننا نضع فى العمود الأول أربعة سطور تحدد حالات الصيغة، ثم نطبق على هذه الحالات تعريفات الثوابت سبع مرات متعاقبة، وهذا يعنى أن يكون لدينا ثمانية أعمدة

فى قائمة الصدق، يتحدد ترتيب تطبيق تعريفات الثوابت بمقتضى الشجرة التركيبية التالية :



الثابت الرئيسى فى الصيغة هو التكافؤ الذى نطبق تعريفه فى العمود الثامن والأخير بعد سلسلة التطبيقات للثوابت الجزئية بالترتيب المبين طبقاً للشجرة التركيبية. والتكافؤ فى الصيغة علاقة بين نفيين. الأول نفى لفصل والثانى نفى لوصل. لاحظ ترتيب تطبيقات النفى المختلفة فى طرف التكافؤ الثانى، والذى يؤدى الاخلال به الى الاخلال بقيم صدق المركب فى الحالات المختلفة لمتغيراته. ننتقل الآن الى قائمة الصدق الخاصة بهذه الصيغة لنجدها على النحو التالى ولنا على هذه القائمة ملاحظتان أساسيتان :

الأولى أن قيم الثابت الرئيسى، وهى الموجودة في العمود الثامن، كاذبة

P	Q	P v Q	~ (P v Q)	~ P	~ Q	~ P & ~ Q	~ (~ P & ~ Q)	~(P v Q) ↔ ~(~ P & ~ Q)
T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T	⊥
T	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	T	⊥
⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	⊥	⊥
(١)		(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)

فى السطور الأربعة جميعاً، أى أنه لا توجد حالة واحدة تصدق فيها الصيغة، بمعنى آخر لا توجد شروط من أى نوع تجعل من مثل هذا المركب صيغة صادقة أبداً. سنؤجل البحث في مغزى هذا الأمر الى القسم التالى من هذا الفصل.

أما الملاحظة الثانية فشكلية الى حد ما، وتتمثل فى أننا وضعنا الأرقام الموجودة أسفل كل عمود فى قائمة الصدق بجوار ما يمثلها من عمليات تركيبية على الشجرة الخاصة بالصيغة. ونفعل هذا من أجل بيان الكيفية التى يتم بها تطبيق كل تعريف على حدة، وترتيب هذا التطبيق. فالقيم الموجودة فى العمود الثامن مثلاً تأتى من تطبيق تعريف التكافؤ على القيم الموجودة فى العمودين الثالث والسابع، وهكذا.

لعل فى الأمثلة الأربعة السابقة ما يكفى لبيان الكيفية التى يتم بها تطبيق قائمة الصدق. فإذا كان لدينا من حيث المبدأ عدد لا متناه من الصيغ التى يمكن تركيبها من مفردات لغة منطق القضايا، فلا شك أن قائمة الصدق أسلوب مضمون لاختبار صدق أى من هذه الصيغة، ومهما بلغت درجتها من التعقيد سواء من حيث عدد المتغيرات الذى ينعكس على عدد السطور، أو من حيث عدد مرات ورود الثوابت الذى ينعكس على عدد أعمد القائمة. ننتقل الآن الى دراسة بعض التطبيقات الهامة.

٣- التصنيف الدلالى للصيغ المنطقية

لعلنا نكون قد لا حظنا أن الصيغ الواردة بالأمثلة السابقة تنقسم إلى ثلاثة أنواع بحسب قيم الصدق التى يأخذها الثابت الرئيسى فى كل منها بالقياس إلى مجموع حالات الصدق والكذب الممكنة والخاصة بمجموعة

المتغيرات الداخلة فى تكوين الصيغة. لدينا الصيغة الواردة فى المثال رقم (٢) التى يصدق الثابت الرئيسى فيها دائماً، ومهما كانت حالة الصدق أو الكذب الخاصة بالمتغيرات. فى مجموعة ثانية تضم المثالين الأول والثالث، والثابت الرئيسى فى كل منهما يصدق فى بعض الحالات ويكذب فى أخرى أما النوع الثالث فيضم المثال رقم (٤)، وهو صيغة لا يصدق ثابتها الرئيسى مهما كانت حالة الصدق بها الخاصة بمتغيراته، أى أنه يكذب فى كل الأحوال. ولا تخرج أى صيغة منطقية صحيحة التركيب عن أى الأنواع الثلاثة المشارإليها، والتى نحددها فيما يلى (١):-

أولاً :

- الصيغ الصادقة منطقياً Logically true، وهى تلك الصيغ التى يصدق ثابتها الرئيسى مهما كانت قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات التى تحتويها. فإذا كانت المتغيرات تعبر عن قضايا بسيطة، وصدق القضايا البسيطة يستند إلى علاقة بينها وبين الواقع الخارجى، فإن الصيغ المركبة منها بواسطة دالات الصدق حين تصدق مهما كان موقف متغيراتها من حيث دلالاتها الواقعية، فإن الصدق المنطقى هذا يكون مستنداً الى الصورة المنطقية للصيغة فقط، ومنفصلاً عن الصدق الواقعى للقضايا التى تدخل فى تكوين هذه الصيغة.

وكان فتجنشتين أول من سمى الصيغ الصادقة منطقياً بالصيغ التكرارية (أو التوتولوچية) Tautological، وهى تلعب دوراً محورياً فى

---

(١) تختلف معالجة هذا التصنيف الثلاثى قليلاً من باحث لآخر، ويما لايؤثر على المضمون العام للفكرة. قارن على سبيل المثال :

(1) Lemmo,E.J.(1965),PP. 68 - 69.
(2) Simpson(1988),PP.29-30.

بينة النظرية المنطقية وخاصة فى نظرية الاستنباط كما سنرى لا حقاً. المهم أن الصدق المنطقى مفهوم منفصل عن الصدق الواقعى ومرتبط بمفهوم الصحة المنطقية على النحو الذى سنراه فى الفصل التالى.

ثانياً :

- الصيغ المتسقة Consistent: وهى تلك الصيغ التى يصدق ثابتها الرئيسى فى حالة واحدة على الأقل، أو يكذب فى حالة (أخرى!) على الأقل، وتسمى أحياناً عرضية Contingent. ليس المهم عدد الحالات التى يصدق فيها الثابت الرئيسى والحالات التى يكذب فيها، ولا يدل على شىء ذى قيمة أن يكون عدد الحالات متساوياً أو متفاوتاً بدرجة كبيرة، يلزم فقط حالة على الأقل من هنا، أو حالة هناك لكى ينطبق وصفنا على الصيغة.

وهذا يجعل الاختلاف بين هذا النوع من الصيغ والصيغ الصادقة منطقياً على أوضح ما يكون. فالصيغة المتسقة تصدق كنتيجة لمساهمة وتعاون طرفين، هما الصورة المنطقية للصيغة، والصدق (أو الكذب) الخاص بالقضايا التى تحل المتغيرات محلها. خذ مثلاً الصيغة المعروضة فى المثال رقم (١) (السابق) نلاحظ أن " $\sim P \vee Q$ " تصدق فى حالة وحيدة وهى كذب القضيتين البسيطتين المكونتين للمركب، واللتين نعبر عنهما بالمتغيرين "Q"و"P" ، فضلاً عن معنى الثوابت المنطقية المستخدمة، وهى النفى والفصل. وبهذا يساهم الصدق الواقعى والصورة المنطقية معاً لتحديد شروط صدق الصيغة التى أشرنا اليها.

ثالثاً:

- الصيغ غير المتسقة Inconsistent ، وتسمى أحيانا المتناقضة

Contradictory : وتشمل تلك المجموعة من الصيغ التى لا يصدق ثابتها الرئيسى أبداً، ويأخذ قيمة الكذب فى كل حالات الصدق أو الكذب الخاصة بالمتغيرات. ومن أمثلة هذا النوع الصيغة الرابعة فى المجموعة السابقة من الأمثلة، وغيرها الكثير.

والصيغ المتناقضة تكون كذلك بسبب الصورة المنطقية فقط، ولا دور للصدق (أو الكذب) الواقعى للقضايا التى تعبر عنها المتغيرات فى تحديد قيمة صدق الصيغة، وفى هذا تشترك مع الصيغة الصادقة منطقياً. أما وجه الخلاف فهو أن النوع الأول يلزم عن الصورة المنطقية فيه صدق الصيغة إطلاقاً، وفى النوع الحالى يلزم عن الصورة المنطقية كذب الصيغة اطلاقاً. فإذا أدخلنا الصيغ المتسقة كطرف فى المقارنة، وجدنا أن الصورة المنطقية تسمح فيها بحالة واحدة على الأقل تأخذ فيها قيمة كذب بالمقارنة مع الصيغ الصادقة منطقياً، أو بحالة واحدة تصدق فيها بالمقارنة مع الصيغ المتناقضة.

ومن السهل الآن رصد بعض العلاقات بين تلك الأنواع الثلاثة من الصيغ. من السهل علينا ملاحظة أن عند نفى الصيغة الصادقة منطقياً ينتج لدينا صيغة غير متسقة. وعند نفى صيغة غير متسقة أو متناقضة ينتج لدينا صيغة صادقة منطقياً (توتولوجية). أما نفى الصيغة المتسقة فلا يكون الا صيغة متسقة أخرى، على شرط أن تكون قيم صدق الثابت الرئيسى فى كل منها مختلفة عن الأخرى.

إذا كان أحد طرفى مركب وصلى صيغة متناقضة صار المركب متناقضاً أيضاً، حتى وإن كان الطرف الآخر صيغة توتولوجية. وإذا كان

أحد طرفى علاقة الوصل صيغة توتولوجية كانت نوعية المركب متوقفة تماماً على نوعية الطرف الآخر، بل ومتطابقة معها فى الواقع.

وإذا كان أحد طرفى مركب فصلى صيغة توتولوجية فالمركب يجب أن يكون توتولوجياً هو أيضاً، مهما كان نوع الطرف الآخر. أما إذا كان أحد طرفى الفصل متناقضاً فنوعية المركب تتوقف على الطرف الآخر وحده، بل أنه ينتمى الى نفس نوعه. وفى غير هاتين الحالتين تتوقف نوعية الصيغة على توزيع قيم الصدق فى كل منهما.

والمركب التضمنى يكون صادقاً منطقياً إذا كان مقدمه من النوع المتناقض أو إذا كان تاليه صيغة صادقة منطقياً. أما إذا كان المقدم صادقاً منطقياً فالمركب يتبع التالى من حيث النوع. وإذا كان التالى متناقضاً فالمركب يختلف بحسب نوعية المقدم، إذا كان المقدم متناقضاً كان المركب صادقاً، وإذا كان متسقاً كان المركب متسقاً أيضاً، وإذا كان صيغة توتولوجية كانت الصيغة التضمنية الكلية متناقضة.

والتكافؤ بين صيغتين متناقضتين أو صيغتين صادقتين منطقياً يكون هو نفسه صادقاً منطقياً، دون ضرورة وجود أى علاقة بين طرفى التكافؤ ويكون التكافؤ متناقضاً إذا كان أحد طرفيه متناقضاً والآخر توتولوجياً. ما إذا كان أحد الطرفين فقط متناقضاً أو توتولوجياً والآخر متسقاً كان المركب التكافؤى متسقاً.

أما عن الصيغ المتسقة فوجودها كطرف لمركب وصلى يمنع أن يكون هذا المركب توتولوجياً مهما كانت نوعية الطرف الآخر، ووجودها كطرف فى مركب فصلى يمنع أن يكون غير متسق، ووجودها كطرف فى علاقة التضمن

(سواء كمقدم أو تالى) يمنع، ضمن نتائج أخرى، أن يكون المركب متناقضاً.
والآن نتوقف عند بعض **الأمثلة** والتطبيقات التى ترتبط بالعلاقات الدلالية التى توقفنا عندها تواً.

مثال (٥)

برهن على صحة العبارتين التاليتين:

أ- إذا كان أحد طرفى صيغة فصلية صيغة توتولوجية كانت هى الأخرى توتولوجية.

ب- إذا كان أحد طرفى صيغة تضمنية صيغة متسقة امتنع أن يكون المركب متناقضاً.

أ- البرهان المطلوب لا يمكن إلا أن يكون غير صورى Informal ، لأننا لم نتناول نظرية البرهان بعد. نقول فى هذا الصدد إنه يلزمنا لإنشاء علاقة الفصل طرفان أحدهما كما تقول العبارة (أ) صادق منطقياً، وهذا معناه أننا بصدد صيغة منطقية صادقة دائماً، أى يصدق ثابتها الرئيسى مهما كانت قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات. ولما كان تعريف الفصل يقضى بأن المركب يصدق مادام أحد طرفيه صادقاً على الأقل، ففى حقيقة وجود الصيغة التوتولوجية كطرف ما يضمن توافر هذا الشرط بغض النظر عن نوع أو حقيقة الطرف الآخر من المركب الفصلى، وهذا يرجع كما نعلم الى أن القيم التى توضع تحت الثابت الرئيسى فى الصيغة التوتولوجية هى الصدق. وهو المطلوب إثباته.

ب- البرهان فى الحالة الثانية أصعب قليلاً. نفترض أولاً أن الصيغة المتسقة تأتى كمقدم للصيغة التضمنية، وفى هذه الحالة يأخذ الثابت

الرئيسى لهذا المقدم قيمة الكذب مرة واحدة على الأقل، وفى هذه الحالة يكون المركب صادقاً، بغض النظر عن قيمة صدق التالى فى هذه الحالة بالتحديد، وبغض النظر أيضاً عن بقية الحالات يكون صدق هذه الحالة كافياً لامتناع، بل لاستحالة أن يكون المركب متناقضاً. قد يكون توتولوجياً، أو متسقاً، ولكنه لا يكون متناقضاً مهما كان الأمر.

نفترض ثانياً أن الصيغة المتسقة تأتى كتالى للصيغة التضمنية. فى هذه الحالة، وكما نعلم من تعريف الإتساق نجد أن هناك حالة واحدة على الأقل للصيغة المتسقة يكون الثابت الرئيسى فيها صادقاً. وهذا فى حد ذاته يكفى لجعل المركب التضمنى صادقاً بالنسبة لهذه الحالة على الأقل، وبغض النظر عن قيمة صدق المقدم. وبما أن لدينا سطر واحد يصدق فيه المركب التضمنى، ففى هذا ما يكفى لضمان ألا يكون المركب متناقضاً على الإطلاق. قد يكون توتولوجياً، وقد يكون متسقاً، ولكنه من المستحيل أن يكون متناقضاً.

نفترض ثالثاً أن مقدم التضمن قضية متسقة وكذلك تاليه، وهنا لا نشعر بالحاجة الى تقديم برهان خاص بهذا الافتراض، بل سنكرر أحد الافتراضين السابقين، لأن كلاً منهما لا يمنع أن يكون الطرف الآخر متسقاً أيضاً مما يعنى أن الأفتراضين يستنفذان كل الاحتمالات الممكنة فى هذا الخصوص. وهكذا نكون قد قدمنا برهاناً غير صورى على العبارة (ب).

مثال (٦)

حدد قيمة صدق الصيغة التالية:

$$\{P \vee (Q \rightarrow R)\} \leftrightarrow \{P \,\&\, (R \vee Q)\}$$

أ- فى حالة صدق جميع المتغيرات.

ب- فى حالة صدق كل من "P" و "Q" وكذب "R" .

جـ- فى حالة كذب "P" وصدق كل من "R" ، و "Q" .

من الممكن أن نلجأ لتركيب قائمة الصدق كما درسناها، ويكون لدينا ثمانية سطور نظراً لوجود ٣ متغيرات، ويكون لدينا ستة أعمدة لوجود ٥ ثوابت. ولكن لأن المطلوب هو تحديد قيمة الصيغة المركبة فى حالات محددة نستطيع أن نكون الحالات المطلوبة فقط فيما يلى من خطوات:

الحالة أ بتبديل قيم المتغيرات بالصدق نجد أن الصيغة تكون كمايلى فى الخطوة الأولى:

١- $\{T \& (T \vee T)\} \leftrightarrow \{T \vee (T \rightarrow T)\}$

٢- $\{T \& T\} \leftrightarrow \{T \vee T\}$

٣- $T \leftrightarrow T$

٤- T

فى الخطوة الثانية طبقنا تعريف التضمن فى القوس الأول وتعريف الفصل فى القوس الثانى.

فى الخطوة الثالثة طبقنا تعريف الفصل والوصل، وفى الخطوة الرابعة تعريف التكافؤ الذى يمثل الثابت الرئيسى فى الصيغة. وبهذا تكون قيمة صدق الصيغة فى حالة صدق كل متغيراتها هى الصدق.

هذه الطريقة تعد اختصاراً للقائمة الكاملة وليست شيئاً مختلفاً عنها. غير أنها ليست بديلاً عن قوائم الصدق لأنها تتعامل مع حالة واحدة محددة سلفاً.

الحالة ب: وهنا نضع فى الصيغة القيمة "T" بدلاً من "P" و "Q" ،
ونضع ⊥ بدلاً من .

١- $\{T \vee (T \rightarrow \bot)\} \leftrightarrow \{T \,\&\, (\bot \vee T)\}$

٢- $\{T \vee \bot\} \leftrightarrow \{T \,\&\, T\}$

٣- $T \leftrightarrow T$

٤- T

نحن أمام نفس عدد الخطوات التى نصل بها الى قيمة الثابت الرئيسى، وهى الصدق أيضاً، فى الحالة المذكورة. لاحظ تسلسل خطوات الحل وتطابقها الكامل مع خطوات تكوين الشجرة التركيبية للصيغة. لاحظ أيضاً أننا نطبق تعريفات الثوابت التى درسناها بشكل مباشر.

الحالة جـ: نستبدل قيمة الكذب " ⊥" بالمتغير "P" وقيمة الصدق "T" بكل من المتغيرين "Q" و "R" ، وتكون الخطوات على النحو التالى:

١- $\{\bot \vee (T \rightarrow T)\} \leftrightarrow \{\bot \,\&\, (T \vee T)\}$

٢- $\{\bot \vee T\} \leftrightarrow \{\bot \,\&\, T\}$

٣- $T \leftrightarrow \bot$

٤- $\bot$

فى الحالة جـ نجد أن القيمة الناتجة للثابت الرئيسى هى الكذب، وهذا نتيجة لاختلاف قيمتى صدق طرفى علاقة التكافؤ. ولهذا فالصيغة تكذب، بالطبع فى هذه الحالة. ومن نتائج هذا أيضاً أن الصيغة تكون متسقة لوجود بعض حالات المتغيرات التى تصدق فيها (الحالة أ، والحالة ب)، وحالة واحدة على الأقل كاذبة، وهى الحالة جـ.

٤- الكفاية التعبيرية

تقتصر لغتنا المنطقية على عدد محدود من الثوابت، وهى تعبر عن دالات صدق محددة تم تعريفها فى بداية هذا الفصل. غير أن هناك دالات صدق أخرى، من السهل تصورها، ولا نجد لها تعريفاً مباشراً من مجموعة الثوابت المستخدمة. مثال ذلك الدالة التى تصدق فى حالة كذب أحد طرفيها على الأقل وتكذب فى غير ذلك وغيرها. أما السؤال الذى نحاول البحث عن إجابة له فى هذا القسم فهو: هل تكفى الثوابت التى تحتويها لغتنا المنطقية للتعبير عن الدالة المشار اليها، وعن غيرها من دوال الصدق الممكنة؟ ولا شك أن الإجابة عن هذا السؤال تنطوى على تطبيق آخر لتكنيك قوائم الصدق(١).

نبدأ بثابتى الصدق "V" ، والكذب "Λ" ، وهما ثابتان صفريان كما نعلم، أى لا يتعلقان بأى متغيرات على الإطلاق، وهما على كل حال يعبران كما يظهر بجلاء عن القيمتين اللتين نعرفهما فى المنطق الكلاسيكى وهما الصدق والكذب. أما الدالات التى تحتوى على متغير واحد فثابت النفى يكفى للتعبير عنها تماماً. ذلك أن هناك دالتان ممكنتان فقط وهما صدق المتغيرأو كذبه ونعلم أن التعبير عن الدالة الأولى يكون باختيار متغير أياً كان، على أن يلتصق هذا المتغير إذا وردت دوال أخرى، وعن الثانية بنفى هذا المتغير، ولا وجود لاحتمال آخر.

أما الثوابت التى تربط بين متغيرين وهى التضمن والوصل والفصل

---

(١) لا تكاد تخلو أى دراسة جادة للمنطق الحديث من معالجة تفصيلية لأسلوب قوائم الصدق، وخاصة استخدامه فى البرهان على الكفاءة التعبيرية للغة المنطقية. راجع فى هذا الصدد.
Newton - Smith (1985); pp. 83 - 87.

والتكافؤ فلا تعرف إلا أربعة دالات فقط. وتخبرنا قواعد قوائم الصدق أن هناك ١٦ دالة من الممكن أن تقوم بين متغيرين. والفكرة هنا أن لدينا أربعة سطور لكل دالة ذات متغيرين، كل واحد من هذه السطور يحتمل إما قيمة الصدق أو الكذب، فنضرب العدد ٢ فى نفسه أربع مرات فيكون لدينا ستة عشر تأليفا ممكنا نستطيع بسطها فى القائمة التالية:

P	Q	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	T	T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥
⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥	T	⊥

نستطيع بالقراءة المتأنية لهذه القائمة أن ندرك أن الستة عشر عموداً تعبر عن ست عشرة دالة مختلفة، وأنها تستنفد كل احتمالات صدق أو كذب مجموع حالات المركب التى يتكون من متغيرين دون زيادة. ولعلنا ندرك أيضاً أن دوال الوصل والفصل والتضمن والتكافؤ هى الدوال «٨»، و «٢» و «٥»، و«٧» على الترتيب. والآن ماذا عن بقية الدوال؟ هل نعطى كلا منها رمزاً مختلفاً بحيث نزيد عدد الثوابت المنطقية بشكل كبير، وهو ما سيجعل لغتنا أعقد بكثير من وضعها الحالى؟ (١)

---

(١) ربما كان إصرار الدكتور عادل فاخورى على، الرد بالإيجاب على هذا التساؤل سبباً مباشراً لعدم وضوح معالجته لهذه المسألة بعض الشئ. وتمثل ذلك فى إهماله لست روابط كاملة نظراً لعدم وجود ثابت محدد يقابلها. أما إذا وضعنا فى الاعتبار أن ثابتى النفى والتضمن مثلاً =

الإجابة ببساطة هى أن الثوابت الموجودة لدينا بالفعل كافية للتعبير عن الدوال الست عشرة الواردة فى الجدول السابق. بل قد أصبح معروفاً الآن أن من الممكن الإستغناء حتى عن بعض ثوابتنا الحالية والإستعانة بثابتين فقط، هما الوصل والنفى، أو الفصل والنفى، أو التضمن والنفى، أو التضمن وثابت التناقض. بل إن بعض المناطقة أثبتوا أنه يمكننا الإعتماد على ثابت واحد يمثله دالة الصدق التى أشرنا فى البداية وهى تطابق العمود رقم «١٥» فى القائمة السابقة. يبقى هنا توضيح كفاية ثوابتنا للتعبير عن الدالات جميعاً.

الأولى والأخيرة تعبر عنهما أى صيغة صحيحة منطقياً ونقيضها بحيث يرد فى كل منهما المتغيران "P" و "Q" إذا شئنا الإلتزام بهذا الشرط. أما إذا لم تتقيد به فيمكن التعبير عنهما بالثابتين "V" ، "Λ" .

الدالة رقم «٣» تعبر عن الصيغة "$Q \rightarrow P$" لأنها لا تكذب إلا فى حالة صدق "Q" وكذب "P" ، وتقابلها الدالة رقم «١٤» التى تمثلها نفى الصيغة السابقة، وهو الصيغة $\sim (Q \rightarrow P)$.

الدالة رقم «٤» تعبر عنها الصيغة "$(P \ \& \ Q) \vee (P \ \& \sim Q)$" ، وهو ما يعنى "P" فقط على سبيل الأختصار، وذلك لأن القيمة الموجودة تحت الدالة تطابق قيم "P" أما الدالة رقم «١٣» فهى تمثل نفى الدالة رقم

=يكفيان للتعبير عن كل الدالات الممكنة لما أصررنا منذ البداية على تعيين رابطة لغوية أو منطقية محددة لكل منها. ومن ناحية أخرى يجب أن نضع فى الأعتبار أن الدالات الست عشرة تضم فيما بينها الدالات الأربع الخاصة بمتغير واحد، والدالتين اللتين لا تحتويان على أى متغير. قارن فى هذا الإطار.

دكتور عادل فاخورى (١٩٨٨)، ص ص ٢٢ - ٢٥

«٤» أى "P ~" ، أو صيغة أخرى هى "$(\sim P \& Q) \vee (\sim P \& \sim Q)$".

الدالة رقم «٥» تمثلها الصيغة "$P \rightarrow Q$" كما ذكرنا، ونفيها هو الدالة رقم «١٢» ويمثله الصيغة $\sim (P \rightarrow Q)$. أما الدالة رقم «٦» فتمثلها الصيغة التالية: "$(Q \& \sim P) \vee (Q \& P)$"، أو باختصار "Q" فقط. يقابل الدالة رقم «٦» الدالة رقم «١١» وتعبر عنها بالصيغة "$(\sim Q \& P) \vee (\sim Q \& \sim P)$"، أو "Q ~" فقط.

الدالتان رقم «٧» ورقم «١٠» متناقضتان ويمثلهما على الترتيب المركب التكافؤى ونفيه، أى الصيغتان "$(P \leftrightarrow Q)$" ، و"$\sim (P \leftrightarrow Q)$" على الترتيب. الدالة التاسعة هى نفى لدالة الوصل رقم ٨ وكذلك الدالة رقم ١٥ تمثل نفى الفصل الذى يعبر عنه الدالة رقم ٢.

وتجدر الإشارة إلى أنه ليست هذه هى الصيغ الوحيدة التى تعبر عن هذه الدالات فمن حيث المبدأ يوجد عدد كبير من هذه الصيغ الذى يكفى فقط أن تتطابق قيم الصدق الخاصة بالثابت الرئيسى فيها مع قيم الصدق الخاصة بإحدى الدالات الست عشرة الموجودة لدينا هنا، ومن ثم تكون الصيغة المعينة معبرة بكل كفاءة عن هذه الدالة. إن ما حاولنا تأسيسه هنا هو أن لكل دالة صدق ممكنة، أى لأى من الدالات الست عشرة الموجودة فى القائمة توجد صيغة واحدة على الأقل. وفى هذا ما يكفى لتأسيس النتيجة التى تقول أنه لا وجود لدالة صدق تحتوى على متغيرين على الأكثر ولا تستطيع ثوابت نسقنا التعبير عنها. إذ أن لغتنا المنطقية ذات كفاية تعبيرية Expressive Adequacy كاملة فى حدود متغيرين على الأكثر.

وقد يسأل أحدهم: هل المعالجة التى قدمناها فى هذا القسم تكفى

للتعامل مع كل دالات الصدق الممكنة؟

إن ما تحدثنا عنه ينطبق على الدالات الصفرية، والدالات ذات المتغير الواحد، وأخيراً ذات المتغيرين. ونحن نعلم أنْ هناك دالات تحتوى على ثلاثة متغيرات، أو أربعة، أو خمسة ... وهكذا. ونعلم أيضاً أن هناك قانونا نستخرج به كل التأليفات المُكنة لصدق وكذب هذه المتغيرات، وهو القانون السابق ذكره، وصيغته:

$$ع = ٢^{ن}$$

هناك قانون مناظر يحكم عدد دالات الصدق الممكن توافرها بالنسبة للصيغ ذات العدد "ن" من المتغيرات. هذا القانون يرتبط بالقانون الذى أشرنا إليه تواً، من حيث أن الأخير يحدد عدد سطور قوائم الصدق، أى عدد حالات المتغيرات المكنة. أما القانون الذى نبحث عنه فيقدم عدد الدالات الممكن وجودها بالنسبة لهذا العدد من الحالات، أى أنه يقدم لنا عدد قوائم الصدق الممكن وجودها بالنسبة لعدد سطور المتغيرات المعين. ولما كانت هناك قيمتان للصدق لكل من الحالات كانت الدالات الممكنة لصيغة مساوية للعدد "٢" ، الذى يعبر عن القيمتين (⊥، و⊤) مضروبة فى نفسها بعدد الحالات الممكنة للصيغة. وهذا يترجم فى القانون التالى :

$$د = ٢^{ع} = ٢^{٢^{ن}}$$

حيث أن "د" ترمز الى عدد الدالات الممكنة بالنسبة لعدد معين من الحالات، و "ع" ترمز الى عدد هذه الحالات بالنسبة الى "ن" وهى تمثل

عدد المتغيرات. ومعنى هذا أن اللغة المنطقية تنتج عدداً هائلاً من الدالات الممكنة.فقد علمنا تواً أن عدد الدالات التى تحتوى على متغيرين يساوى $٢^{٢^{٢}}$ =١٦ دالة. وبتطبيق نفس القانون نجد أن عدد الدالات الممكنة والتى تحتوى على ثلاثة متغيرات يساوى $٢^{٢^{٣}}$ = $٢^{٨}$= ٢٥٦ دالة مختلفة. أما الدوال التى تحتوى صيغها على أربعة متغيرات فتحسب على الوجه التالى :

$٢^{٢^{٤}}$= $٢^{١٦}$= $٢^{٨}$ x $٢^{٨}$ = ٢٥٦ x ٢٥٦ =٦٥٥٣٦ دالة مختلفة

ولن نتوقف هنا لنحسب عدد الدالات التى تعبر عنها الصيغ ذات الخمسة متغيرات فهى تعد بالملايين، وهكذا يتم حساب عدد الدالات بالنسبة لأعداد أكبر من المتغيرات. أما المهمة التى يجب أن نقوم بها الآن فهى توضيح الكفاية التعبيرية للغتنا المنطقية إزاء هذا العدد الضخم من الدالات الممكنة، أى قدرة لغتنا المنطقية التى حددنا مفرداتها وقواعد تركيبها فى الباب الأول، ودلالة صيغها المركبة فى بداية هذا الفصل، على التعبير عن كل الدالات الممكنة طبقاً للقاعدة التى شرحناها تواً. فإذا لم يكن ممكنا إثبات هذا الأمر صار من حقنا الشك فى كفاءة اللغة المنطقية التى بين أيدينا(١).

ويصعب لأسباب عديدة أن نعطى برهانا كاملاً على هذه الدعوى فى هذا الموضع. ولكننا سنتبين كيف أن هذا ممكن بسهولة، من حيث المبدأ. ولهذا سنأخذ صيغة غير محددة ولتكن «ص»، تحتوى على ثلاثة متغيرات.

(١) أول من تصدى لهذا البرهان كان المنطقى العظيم بوست Post ، وتبعه الكثيرون حتى أصبح البرهان على هذا الأمر متاحاً فى الكتابات المنطقية المعاصرة بشكل كبير. راجع فى هذا الصدد على سبيل المثال:

- Post, E. (1921), pp.
- Quine, w. (1940), pp. 42 - 45.

سيكون لهذه الصيغة ثمانية حالات صدق خاصة بالمتغيرات، وكما ذكرنا توا مائتين وست وخمسين دالة ممكنة. إحدى هذه الدوال تعبر بدقة عن الصيغة «ص» التى نتحدث عنها، نفترض أن دالة الصيغة لها ٣ حالات تصدق فيها، والباقى (= خمسة) تكون فيها كاذبة.

للتعبير عن هذه الدالة بإستخدام اللغة المنطقية نفترض أن المتغيرات هى "P" و "Q" و "R" مثلاً. وسنحتاج إلى الثوابت "~" و "v" و "&" فقط بغض النظر عن كون أى من هذه الثوابت أو حتى جميعها يقع داخل الصيغة أم لا. ونظراً إلى أن لدينا ٣ حالات سنعبر عن كل حالة على حدة أولاً. لتكن الحالة الأولى هى صدق المتغيرات جميعاً، وبهذا نعبر عنها هكذا:-

(P & Q & R) (١)

ولتكن الحالتان المتبقيتان لصدق الدالة هما: صدق "P" وكذب كل من "Q" , "R" . والحالة الثانية هى صدق كل من "P" و "R" وكذب "Q"، وحدها. ولأن كذب الصيغة البسيطة يعنى صدق نفيها، يمكن ترجمة الحالتين

(١) من حقنا الإعتراض بأن هذه الصيغة غير صحيحة التركيب وفقاً للقواعد التى حددناها فى الباب الأول من هذه الدراسة غير أنه يمكن فهم الصيغة السابقة إما بإعتبارها مكافئة للصيغة {P&(Q&R)} أو بأعتبارها تمثل الصيغة {(P&Q)&R} ، وهما صيغتان متكافئتان دلالياً كما يمكن تبين ذلك عن طريق قائمة الصدق. وسنرى بعد قليل أن نفس الملاحظة تنطبق على ثابت الفصل. ولهذا يمكن إهمال الأقواس دائماً فى هاتين الحالتين. ولكن حاجتنا للأقواس تنشأ من وجود ثوابت لا نستطيع التحرر فيها مثلما نفعل مع الوصل أو الفصل، وأقصد هنا ثابت التضمن وكذلك النفى. هذا فضلاً عن صيغ أخرى كثيرة يتداخل فيها استخدام الوصل مع الفصل مما يستدعى استخدام الأقواس.

السابقتين إلى ما يلى على الترتيب.

$$(P \,\&\, \sim Q \,\&\, \sim R)$$

$$(P \,\&\, \sim Q \,\&\, R)$$

إن أى حالة من الحالات الثلاث التى عرفناها تواً تحقق صدق الدالة التي نحاول اكتشاف صيغة تمثلها، ونعبر عن هذا الأمر بتركيب صيغة فصلية من الصيغ السابقة باعتبار أن أيا منها يحقق صدق الدالة وتكذب فى حالة عدم صدق الحالات الثلاث جميعاً. ومن هنا تكون الدالة المنشودة على الوجه التالى:

$$(P \,\&\, Q \,\&\, R) \vee (P \,\&\, \sim Q \,\&\, \sim R) \vee (P \,\&\, \sim Q \,\&\, R)$$

ولعلنا نلاحظ أن هذه القاعدة يمكن تعميمها بالنسبة لكل دالة سواء كانت ذات ثلاثة متغيرات أو أربعة ... وهكذا. وهنا نكون قد أثبتنا وجود صيغة واحدة على الأقل تستطيع التعبير عن أى دالة ممكنة. ولكن واقع الحال أنه توجد صيغ كثيرة ممكنة بالنسبة لكل دالة، وهى جميعاً متكافئة. ولكن وجود دالة واحدة فقط يكفى لإثبات ما نحاول عمله فى القسم الحالى وهو بيان الكفاية التعبيرية للغة المنطقية.

الفصل الثاني
الصحة المنطقية والإتساق

الفصل الثانى
الصحــة المنطقيــة والإتســاق

استعرضنا فى الفصل السابق فكرة قوائم الصدق كأساس لتحديد دلالة الصيغ، أى لتحديد شروط صدقها التى تتمثل فى حالات أو نماذج أو تراكيب من قيم صدق المتغيرات متفاعلة مع تعريفات الثوابت كدالات صدق لهذه المتغيرات. وأدى هذا إلى تحديد معنى مفهوم الصدق المنطقى فيما يخص دالات الصدق فقط. وتبع هذا برهان على الكفاية التعبيرية لمفردات لغة حساب القضايا، أى قدرتها على تقديم صيغة واحدة على الأقل فى مقابل أى من دالات الصدق الممكن وجودها.

ومهمتنا فى هذا الفصل الحالى هى توسيع نطاق استخدام قوائم الصدق، عن طريق توظيف فكرتها العامة فى اختبار صحة المتتابعات، وهى تمثل الصور المنطقية للحجج والعمليات الإستدلالية المختلفة. والهدف من اختبار المتتابعات هو التمييز بين صحيح الحجج التى تمثلها هذه المتتابعات وفاسدها، وهذا هو جوهر مهمة المنطق، سواء التقليدى أو الحديث، كما نعلم. ومما يدل على ارتباط بحثنا فى هذا الفصل بما تم فى الفصل السابق، أن المتتابعات تتكون من مجموعة من الصيغ إحداها هى النتيجة التى يسبقها الثابت " $\models$ " (أو نظيره التركيبى $\vdash$) أما بقية الصيغ – إن وجد، وبأى عدد – فتمثل المقدمات Premisses وشروط صدق الصيغ الداخلة فى تكوين المتتابعة تلعب دوراً – سيأتى توضيحه بعد قليل فى تحديد صحتها. وهكذا تساهم قوائم الصدق أو الأساليب العديدة البديلة –

والتى سنتعرض لبعضها فى هذا الفصل أيضاً - فى توضيح مفهومى الصحة المنطقية والإتساق. .

١- مفهوم الصحة المنطقية:

ولهذا فجوهر اهتمامنا فى هذا الفصل هو تحديد مفهوم الصحة المنطقية Logical validity . وتحديدنا فى هذا السياق سيكون دلالياً. أما الجناح الآخر لمفهوم الصحة المنطقية، وهو التحديد الإشتقاقى فنخصص له الباب الثالث كله. والصحة الدلالية للمتتابعات أو الاستدلالات هى تفسير الصحة من خلال علاقتها بحالات صدق صيغها. ومع ذلك تختلف الصحة المنطقية هنا عن الصدق سواء المنطقى أو الواقعى الذى هو سمة خاصة بالصيغ والقضايا، بينما الصحة سمة خاصة بالحجج، كما يقول لامبرت وأولريك (١). والآن دعنا نتأمل الحجج التالية ونقارن بينها فى سبيل توضيح مفهوم الصحة المنطقية دلالياً:

أ) إما أن القاهرة تقع على النيل، أو أن الأسكندرية تقع على البحر الأحمر.
الأسكندرية لا تقع على البحر الأحمر. إذن فالقاهرة تقع على النيل.

ب) إما أن الأسكندرية تقع على البحر الأحمر، أو أن القاهرة تقع على النيل.
القاهرة لا تقع على النيل. إذن فالأسكندرية تقع على البحر الأحمر.

جـ) إما أن القاهرة تقع على النيل، أو أن الأسكندرية تقع على البحر الأحمر.الأسكندرية تقع على البحر الأحمر.إذن القاهرة لا تقع على النيل.

د) إما أن الأسكندرية تقع على البحر الأحمر، أو أن القاهرة تقع على النيل.
القاهرة تقع على النيل. إذن الأسكندرية لا تقع على البحر الأحمر.

1- Lambert, K. & Olrich (1980), P. 10.

نلاحظ أن الجملتين (أ) و (ب) تشتركان فى صورة منطقية واحدة، ونحددها على أساس ما درسنا بالباب الأول كما يلى:-

$$P \vee Q, \sim Q \models P$$ (١)

أما الحجتان (جـ) و (د) فتشتركان فى صورة منطقية مختلفة عن تلك التى يشترك فيها (أ)، و(ب)، وهى:

$$P \vee Q, Q \models \sim P$$

وسنرى بعد قليل أن قوائم الصدق تدلنا على صحة الصورة المنطقية التى تمثلها المتتابعة الأولى دلالياً، وعلى عدم صحة الصورة المنطقية الثانية. هذا على الرغم من أن الحجتين (أ) و (د) تتشابهان فى أن كلا منهما له مقدمتين صادقتين ونتيجة أيضاً صادقة. ومن ناحية أخرى تتشابه الحجتان (ب) و (جـ) فى أن نتيجة كل منها كاذبة فضلاً عن إحدى المقدمتين. ومع ذلك لا تعتبر الحجتان الأخيرتان صحيحتين منطقياً مثل الحجتين الأوليين.

السبب فى هذا الأمر أن صحة الحجج أو الإستدلالات من الناحية المنطقية ليست ترجمة مباشرة لصدق مقدماتها أو نتيجتها. إنما تعود الصحة المنطقية الى صورة الحجة، الى المتتابعة التى تمثلها. والمتتابعة تكون صحيحة إذا كان اللزوم فيها حافظاً للصدق (٢)، ومعنى هذا أن مقدمات

---

(١) من الملاحظ أن المتغيرين "P" و "Q" يرمزان لقضيتين مختلفتين فى الحجتين (أ) و (ب)، وكذلك الحال بالنسبة لنفس المتغيرين فى الحجتين (جـ) و (د)، بحيث أن ما يرمز إليه الأول فى المتتابعة الأولى يرمز اليه الثانى، والعكس صحيح. هذا أمر لا يتعارض مع قواعد التركيب التى عرفناها، مادمنا بصدد تكوين متتابعة تعبر عن حجتين مختلفتين ولا تداخل بينهما. نحن نهتم بصورتهما فقط، وهى لا شك صورة منطقية واحدة.

(2) Simpson (1988), p. 35 - 336. See also:
Sainsbury, R. M. (1991), p. 20.

المتتابعة عندما تكون صادقة جميعاً يلزم أن تكون النتيجة كذلك، وهذا معنى حفظ الصدق أو نقله من المقدمات الى النتيجة. فإذا كانت هناك حالة واحدة (أى نموذج أو تركيب معين لقيم الصدق الخاصة بالمتغيرات الموجودة بالمتتابعة ككل) تصدق فيها المقدمات جميعاً، وتكذب النتيجة كانت المتتابعة غير صحيحة، وهذا يعنى أنه من المستحيل بالنسبة للمتتابعة الصحيحة أن يجتمع صدق كل مقدماتها مع كذب النتيجة.

ونظراً الى أنه ليس فى الإمكان فحص كل أمثلة المتتابعات، أى كل الحجج أو الإستدلالات التى تتخذ نفس الصورة المنطقية من أجل اختبار صحتها، أى فى محاولة للبحث عن مثال لحجة مقدماتها صادقة جميعاً ونتيجتها كاذبة، نلجأ الى قوائم الصدق التى ينطبق الحكم الذى نخرج به من اختبار الصورة المنطقية بواسطتها على كل الحجج والاستدلالات التى لها نفس الصورة. وسنتوقف بعد قليل عند بعض الأمثلة لتوضيح الكيفية التى يتم بها تطبيق هذا الأسلوب، ننتقل بعدها لتقديم أساليب أخرى بديلة، وإن كانت تعتمد على نفس الفكرة التى تقوم عليها قوائم الصدق.

نعود إلى مفهومي الصحة وعدم الصحة المنطقية Logical invalidity لنجد أن المتتابعة غير الصحيحة تحتمل من حيث المبدأ أن توجد حالة تكون فيها كل مقدماتها صادقة والنتيجة كذلك صادقة، ولكن هذا لن يكون بسبب صورى، بل مجرد اتفاق (راجع الحجة (د))، وتظل هذه الحجة غير صحيحة حتى فى هذه الحالة، لأن المثال (جـ) له نفس الصورة المنطقية فى الوقت الذى تكون فيه المقدمات صادقة مع كذب النتيجة. ومهما قدمنا من استدلالات تماثل الحجة (د) فهذا لن يغير من الأمر شيئاً بسبب

وجود المثال (جـ) الذى يجعلنا نقطع دون تردد بعدم صحة الصورة المنطقية المذكورة.

أما المتتابعة الصحيحة فيمتنع فيها هذا الإحتمال الأخير إطلاقاً، وتبقى ثلاثة احتمالات فقط هى:-

١- كل المقدمات صادقة والنتيجة صادقة.

٢- إحدى المقدمات على الأقل كاذبة والنتيجة صادقة.

٣- إحدى المقدمات على الأقل كاذبة والنتيجة كاذبة.

ونحن نحب أن تكون كل الإستدلالات التى نقوم بها من المجموعة الأولى، أى تلك الإستدلالات ذات الصورة المنطقية الصحيحة، والتى تصدق مقدماتها جميعاً مما يلزم عنه صدق النتائج. ويعطى الكثير من الباحثين مصطلحاً خاصاً لهذه الحالة وهو السلامة المنطقية Logical Soundness.(١) ولكن هذا ليس هو واقع الحال، فهناك الكثير من الإستدلالات الصحيحة والتى تحتوى على مقدمة كاذبة واحدة على الأقل، وفى هذه الحالة سواء كانت النتيجة صادقة أو كاذبة يظل الإستدلال صحيحاً.

يبقى أن نتوقف لرصد العلاقة بين الإستدلالات أو المتتابعات السليمة والصحيحة. ولا شك أن كل الإستدلالات السليمة صحيحة منطقياً، وليست

---

(١) ترجمة Soundness بالسلامة مجرد اقتراح قابل للتعديل حين يجد المؤلف مصطلحاً آخر المشكلة أن اللفظ متداخل مع Valid حتى فى الإنجليزية. بل إن بعض الباحثين لا يميز بينهما. إلا أن الغالبية تركز على اختلافهما من حيث أن السلامة نوع من الصحة المنطقية. راجع على سبيل المثال:-

Lambert, K. & Olrich (1980), pp. 10 - 23.

كل الاستدلالات الصحيحة سليمة بالمعنى الذى حددناه (راجع المثال (ب)). ولا شك أننا فى كثير من الأحوال، حين نقوم باستدلالات سواء عملية أو فى حياتنا العادية نعتقد فى صدق مقدماتنا فضلاً عن محاولة صياغة حجج صحيحة منطقياً. وهذا يعطى الإستدلالات السليمة ميزة نسبية على بقية الاستدلالات الصحيحة.

غير أن الاستدلالات الصحيحة منطقياً والتى ليست سليمة بالمعنى الذى حددناه ليست عديمة الفائدة حتى فى السياقات العلمية. فنحن نجد أن العلماء حين يواجهون بنظرية علمية جديدة، أى أنهم غير متأكدين من صدقها فإن اختبار هذه النظريات يكمن فى الكشف عن استدلالات صحيحة تكون النظرية موضع الإختبار إحدى مقدماتها، بحيث تكون النتيجة عبارة عن قضايا قابلة للإختبار التجريبى. فإن كانت النتيجة كاذبة يكون من حق العلماء تكذيب النظرية بشرط توافر ثقتهم الأكبر فى بقية المقدمات [١]. وهنا يكون الإستدلال من النظرية إلى النتيجة صحيحاً مع كذب إحدى المقدمات على الأقل.

نعود فنسأل أنفسنا سؤالاً هاماً يتعلق بالصحة المنطقية للحجج. هل هى شرط ضرورى للإقناع العقلى؟ إن المنطق يلعب دوراً حاسماً بالنسبة لمسألة العقلانية. وعقلانية اعتقاداتنا (وتصرفاتنا) من الأمور المرغوبة والمطلوبة إلى حد كبير. ولا شك أن الإجابة عن السؤال السابق هى نعم

---

(١) تقوم فلسفة كارل بوبر العلمية بكاملها على توظيف ذكى لهذه القاعدة الإستنباطية البسيطة نسبياً. ولعل فى هذا ما يعطى رؤية بوبر جاذبيتها وشهرتها. راجع فى هذا الصدد:-
Popper, K. (1959): The Logic of Scientific Discovery.

واضحة وكبيرة. ولكن الصحة المنطقية ليست الشرط الكافى (بدليل الحجة (ب)) التى وإن كانت صحيحة منطقياً إلا أنها ليست مقنعة بسبب عدم سلامتها. فهل إذا كانت الحجة صحيحة ذات مقدمات صادقة، أى إذاكانت سليمة تكون بالضرورة مقنعة عقلانياً؟

المثال الأول يرجح الإجابة بنعم. ولكن لنأخذ مثالاً آخر (هـ) لنرى إن كانت السلامة المنطقية هى الشرط الضرورى والكافى للإقناع العقلى:

(هـ) إذا كانت القاهرة تقع على النيل، فإن عدد كواكب المجموعة الشمسية يساوى تسعة. والقاهرة، بالتأكيد تقع على النيل

إذن عدد كواكب المجموعة الشمسية تسعة.

هذا المثال يعبر عن حجة صورتها المنطقية هى:

$$P \rightarrow Q, P \models Q$$

وهو صحيح لأن المتتابعة صحيحة دلالياً كما نرى. وكذلك الحجة سليمة لأن المقدمتين صادقتان وكذلك النتيجة. ولكن يصعب اعتبار الحجة مقنعة عقلياً. إن مطلب العقلانية أقوى من مطلب الصحة المنطقية والسلامة المنطقية معاً. وليس معنى هذا أنه مختلف. العقلانية فى الحجج تفترض صحتها، وتفترض توافر ثقة كافية فى صدق مقدماتها كشروط ضرورية ولكنها ليست كافية. المطلوب هنا هو الإرتباط الموضوعى بين عناصر الحجة، أى أن تكون جميعاً متعلقة بموضوع معين واحد يربط العقل بشكل مباشر بين عناصره، وليس مجرد استيفاء عناصر الحجة لشرط أو شروط صورية معينة. وربما يكون هذا أحد أسباب مالمسنا فى الباب الأول من بعض التباينات بين الإستدلالات كما نقوم بها فى الواقع العملى وبين النظرية

المنطقية الصورية.

ولعل هذا هو المكان المناسب لأن ننظر فى مسألة المقارنة بين منطق اللغة، والمنطق الصورى الحديث من زاوية دلالية. فقد أكدنا فى الباب السابق أن مفهوم الصورة المنطقية يعتبر الأساس فى تقييم الصحة المنطقية للإستدلالات. فنحن عادة نستخرج الصورة المنطقية للإستدلال، أى نحوله الى متتابعة رمزية. بعد ذلك نجد أن المطلوب منا هو الإجابة عن سؤالين [1] يخصان الاستدلال الأصلى.

أ- ماذا نستنتج إذا كانت المتتابعة صحيحة؟

ب- ماذا نستنتج إذا كانت المتتابعة غير صحيحة؟

بالنسبة للسؤال الأول، ومع تجاهل بعض التحفظات الهامة، والتى توقفنا عند واحد أو اثنين منها فى الباب السابق، نجد أن صحة المتتابعة تجعلنا نقول بصحة الإستدلال اللغوى المقابل لها. ومن الملاحظ أن نقاد النظرية المنطقية المعاصرون، مثل فير الذين يفكرون إمكان نجاح مشروع الصورة المنطقية يتمسكون بجوهرية التحفظات التى أشرنا اليها، ومن ثم يستنتجون استحالة نجاح هذا المشروع الفكرى من أساسه. أما الطرف الآخر من الحوار فنجد أنه يضم الأغلبية، وهى تتمسك باحترام التحفظات المثارة، مع الاعتقاد بامكان تجاوزها مستقبلاً.

أما بالنسبة للسؤال الثانى، وهو المتعلق بعدم صحة المتتابعة المنطقية وأثر ذلك على الاستدلال الأصلى، فنقول هنا إن أحد الاحتمالات هو أن الاستدلال اللغوى نفسه غير صحيح. ولكن هذا ليس هو الاحتمال الوحيد،

(1) Sainsbury, R. M. (1991), p.

فقد يكون صحيحاً، ولكن إما أننا لم نقم بترجمة جمل الإستدلال الى صيغ منطقية بالعمق الكافى لبيان صحتها المنطقية، بل قد يكون مصدر صحة الاستدلال أن صورته المنطقية التى تؤسس صحته منتمية الى نظرية أعمق، كحساب المحمول مثلاً، وبهذا فلا يصح لنا أن نقفز تلقائياً من عدم صحة المتتابعة التى اعتمدناها كصورة منطقية للإستدلال الى عدم صحته.

نعيد التأكيد على أن المنطق سلاح خطير يجب أن يتسلح به الفكر العقلانى الذى يواجه اتجاهات لاعقلانية كثيرة ومن أركان متعددة. ولكن المنطق ليس السلاح الوحيد المطلوب. ذلك أن هناك إعتبارات ثقافية وإجتماعية وسيكولوجية، وربما أيضاً سياسية، تتدخل بقوة فى عملية الحوار الفكرى الذى يدور داخل مجتمع معين، وهو ما لا نهتم به فى هذه الدراسة(١).

٢- اختبار المتتابعات المنطقية:

نقدم فى هذا القسم نماذج تطبيقية متدرجة لتطبيق أسلوب قوائم الصدق على المتتابعات لاختبار صحتها. سبق أن قدمنا بتفصيل ودعم بالأمثلة المتنوعة كيفية تطبيقه فى اختبار صدق الصيغ المنطقية. أما اختبار صحة المتتابعات فيعتمد على تصميم قائمة صدق كاملة تضم كل الصيغ المكونة لها معاً، بحيث يكون عدد المتغيرات الموجودة بصيغ المتتابعة جميعاً

---

(١) ربما يكون المكان المناسب لدراسة هذه الجوانب الهامة هو فرع الدراسة المعروف فى الغرب باسم المنطق العملى Practical logic ، أو المنطق غير الصورى Informal logic . وهناك العديد من المؤلفات التى تهتم بهذا الموضوع ومنها على سبيل المثال:-
Barry, V. E., & Soccio, D. J. (1988).

هو أساس حساب عدد السطور وليس لكل صيغة على حدة. وبالنسبة للمبرهنات، أى المتتابعات التى لا يوجد بها مقدمات نحسب الأمر كما لو كانت هناك مجموعة من المقدمات الصادقة دائماً، فإذا كانت كل قيم الثابت الرئيسى فى المبرهنة صادقة كانت المتتابعة صحيحة وإذا كذبت فى سطر واحد على الأقل كانت غير صحيحة.

نؤكد هنا ما سبقت الاشارة اليه فى الباب الأول من هذه الدراسة، وهو أننا لن نتعامل مع ثابت اللزوم الدلالى باعتباره ثابتاً منطقياً يتم بواسطته تركيب صيغة كبرى بل إنه يشبه ثابت اللزوم الاشتقاقى فى انتماء كليهما الى اللغة البعدية أو الميتالغة. أنه علامة تساوى «إذن» باللغة الطبيعية. ولذلك فالرموز التى سنضعها تحت الثابت عندما تكون "√" تعنى عدم وجود مقدمات صادقة جميعاً مع كذب النتيجة، وعندما تكون "X" تعنى أن فى هذا السطر يوجد حالة يجتمع فيها صدق كل المقدمات مع كذب النتيجة. والآن نفحص بعض الأمثلة بشئ من التفصيل.

مثال (أ)

اختبر صحة المتتابعة التالية:-

$$P \rightarrow Q, P \models P$$

الحل

المتتابعة ذات مقدمتين ونتيجة، وكل المتغيرات الواردة فيها اثنين فقط،

ولهذا يكون شكل قائمة الصدق كما يلى:

P	Q	P → Q	P	⊨	Q
T	T	T	T	√	T
T	⊥	⊥	T	√	⊥
⊥	T	T	⊥	√	T
⊥	⊥	T	⊥	√	⊥
١		٢	٣	٤	٥

وفى العمود الأول وضعنا قائمة بحالات المتغيرات، وهى أربعة لأن صيغ المتتابعة تحتوى على متغيرين. فى العمود الثانى استخرجنا قيم المقدمة الأولى. وفى العمود الثالث وضعنا قيم المقدمة الثانية نقلاً مباشراً من العمود الأول. والعمود الرابع مخصص لثابت اللزوم الدلالى. أما العمود الأخير فالقيم الموجودة تحته مخصصة للنتيجة.

يلاحظ أننا وضعنا رمزاً خاصاً بالنسبة لكل حالات المتغيرات (أى لسطور قائمة الصدق) وهو العلامة (√) ، وسنرى فى أمثلة أخرى العلامة (X) . والهدف من وضع هذه العلامات الخاصة أننا لا نكون قيماً لثابت جديد هو " ⊨ " ، بل إننا نحاول رصد الحالة التى يجتمع فيها صدق المقدمات جميعاً مع كذب النتيجة فإذا وجدنا هذا الأمر وضعنا العلامة (√). ويكفى ورود العلامة (X) مرة واحدة لجعل المتتابعة غير صحيحة. وفى حالتنا هذه مع كل حالات المتغيرات نضع العلامة (√) ∴ المتتابعة صحيحة منطقياً.

مثال (٣)

اختبر صحة المتتابعة التالية:-

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \models R \rightarrow P$$

يوجد بصيغ المتتابعة ٣ متغيرات مما يعنى أن لدينا ثمانية أسطر يتحدد فيها حالات المتغيرات الواردة، فى صيغ المتتابعة جميعاً، وهذا على النحو التالى:-

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$\models$	$R \rightarrow P$
T	T	T	T	T	√	T
T	T	⊥	T	⊥	√	T
T	⊥	T	⊥	T	√	T
T	⊥	⊥	⊥	T	√	T
⊥	T	T	T	T	x	⊥
⊥	T	⊥	T	⊥	√	T
⊥	⊥	T	T	T	x	⊥
⊥	⊥	⊥	T	T	√	T
	١		٢	٣	٤	٥

لاحظ أننا وضعنا العلامة (x) مرتين تحت ثابت اللزوم مما يعنى أن المتتابعة غير صحيحة منطقياً. والحالتان اللتان يجتمع فيهما صدق مقدمتى المتتابعة مع كذب النتيجة تقضيان بكذب المتغير الأول "P" ، واتفاق المتغيرين الثابتين "Q" ، "R" إما صدقاً أو كذباً. ولهذا نقول إن لهذه المتتابعة حالتين عكسيتين، أو مثالين عكسيين.

مثال (٣):

اختبر صحة المتتابعة (المبرهنة) التالية:-

$$\models (Q \vee R) \leftrightarrow \sim (Q \rightarrow \sim R)$$

لتصميم قائمة الصدق يلزمنا ادراك وجود متغيرين فقط مما يعنى أن لدينا أربعة أسطر. يلزمنا أيضاً خمسة أعمدة فى مقابل الثوابت الخمسة، فضلاً عن عمود خاص بتوزيع قيم الصدق على المتغيرين. كذلك نلتزم بوضع خانة خاصة لثابت اللزوم قبل النتيجة مباشرة مما يجعل للقائمة سبع خانات أو أعمدة على الوجه التالى:

Q R	Q v R	~ R	Q → ~ R	~ (Q → ~R)	⊨	(Q v R) ↔ ~ (Q → ~ R)
T T	T	⊥	⊥	T	√	T
T ⊥	T	T	T	⊥	x	⊥
⊥ T	T	⊥	T	⊥	x	⊥
⊥ ⊥	⊥	T	T	⊥	√	T
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧

لاحظ أن الأعمدة من الثانى حتى الخامس ليست زائدة، دائماً هى خطوات تمهيدية للوصول الى القيمة الكلية لصيغة المتتابعة، ونحن نهتدى فى ترتيب الخطوات بالشجرة التركيبية لتلك الصيغة كما نعلم.

لاحظ أيضاً أن المتتابعة بلا مقدمات، ولذلك نسميها مبرهنة Theorem فى حالة كون ثابت اللزوم الخاص بها لا يأخذ العلامة "X" فى أى من سطور القائمة وعدم وجود مقدمات يعنى أن العلامات التى ستوضع

تحت ثابت اللزوم تبنى على أساس قيم النتيجة فقط. ولأن النتيجة كاذبة فى حالتين تصبح المتتابعة غير صحيحة، ولا تصلح الصيغة كمبرهنة لأنها غير صادقة منطقياً، أى أنها ليست صادقة فى كل أحوال المتغيرات. لاحظ أن العلامات الموجودة تحت ثابت اللزوم توضع فى نهاية تقييم المتتابعة، أى أن العمود السادس هو آخر الأعمدة وليس السابع.

مثال (٤)

استخدم أسلوب قوائم الصدق فى اختبار صحة المتتابعة التالية:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R) , (Q \rightarrow S) , \sim S \rightarrow \sim R \models P \rightarrow S$$

الحل:

تحتوى هذه المتتابعة على ثلاث مقدمات ونتيجة، والصيغ المكونة لها تحتوى على أربعة متغيرات هى "P" ، و "Q" ، و "R" ، و "S" . وهذا يعنى أن لدينا:

(٤٢ = ٢ x ٢ x ٢ x ٢ =) ١٦ سطراً.

تمثل حالات المتغيرات، فضلاً عن كثرة عدد الصيغ وتعقيد تركيب بعضها مما يعنى أعمدة كثيرة. وهذا ما سنراه حين نكون قائمة الصدق الخاصة باختبار صيغ المتتابعة، وهى على النحو التالى:

P	Q	R	S	Q v R	P ↔ (Q v R)	(Q → S)	~ S	~ R	~ S → ~ R	⊨	P → S
T	T	T	T	T	T	T	⊥	⊥	T	√	T
T	T	T	⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥	√	⊥
T	T	⊥	T	T	T	T	⊥	T	T	√	T
T	T	⊥	⊥	T	T	⊥	T	T	T	√	⊥
T	⊥	T	T	T	T	T	⊥	⊥	T	√	T
T	⊥	T	⊥	T	T	T	T	⊥	⊥	√	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	T	T	√	T
T	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	√	⊥
⊥	T	T	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	√	T
⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	√	T
⊥	T	⊥	T	T	⊥	T	⊥	T	T	√	T
⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	⊥	T	T	T	√	T
⊥	⊥	T	T	T	⊥	T	⊥	⊥	T	√	T
⊥	⊥	T	⊥	T	⊥	T	T	⊥	⊥	√	T
⊥	⊥	⊥	T	⊥	T	T	⊥	T	T	√	T
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T	T	√	T
		١		٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
					المقدمة الأولى	المقدمة الثانية			المقدمة الثالثة		النتيجة

المتتابعة صحيحة بدليل أن العلامة التى توضع تحت ثابت اللزوم هى علامة "√" دائماً، ومعنى ذلك امتناع اجتماع صدق كل المقدمات، وهى القيمة الموجودة فى الأعمدة أرقام ٣ ، و ٤ ، و ٧ ، مع كذب النتيجة وهى القيمة الموجودة فى العمود الأخير، فى أى حالة من حالات المتغيرات.

الأهم من ذلك، ربما، هو مدى صعوبة تركيب هذه القائمة من الناحية العملية، مما يستلزم البحث عن أسلوب بديل يسهل عملية اختبار صحة المتتابعات بصورة آلية صرفة. ولمن لم تقنعه صعوبة هذه القائمة أن يتخيل أخرى تحتوى صيغتها على ستة متغيرات مثلاً (أى ٦٤ سطراً)، وخمسة عشر ثابتاً (= ١٧ عموداً) !!

٣- القائمة المختصرة:

لا محل للخلاف حول وضوح أسلوب قوائم الصدق فى اختبار صدق الصيغ المنطقية المركبة وفى تقييم المتتابعات من زاوية الصحة المنطقية، فهو يعتمد بالدرجة الأولى على التعريفات الأساسية للثوابت باعتبارها دالات صدق للمتغيرات الواردة بها. ويتم ذلك عن طريق تطبيق هذه التعريفات على كل الحالات الخاصة بالتآليف الممكنة لمجموعة المتغيرات الواردة بالصيغ المركبة أو بمقدمات ونتيجة المتتابعة. ويراعى دائماً أن يتم ذلك وفق الترتيب الذى تكشفه لنا الشجرة التركيبية الخاصة بكل صيغة على حدة.

إلا أن الأمر لا يخلو - كما رأينا - من بعض الصعوبات التى تكتنف عملية تطبيق هذا الأسلوب وخاصة إذا صادفنا متتابعة ذات أربعة أو خمسة متغيرات، وواضح أن سبب الصعوبة يعود الى أن عدد المتغيرات هو مفتاح عدد سطور قائمة الصدق الكاملة، ففى حالة وجود أربعة متغيرات نحتاج

الى ستة عشر سطراً، وهذا ما لاحظناه فى المثال الأخير من القسم السابق. وإذا كان عدد المتغيرات خمسة لزم وجود اثنين وثلاثين سطراً، وأربع وستين سطراً فى حالة وجود ستة متغيرات ... وهكذا. ولا شك أن هذا أمر غير مستساغ من الناحية العملية على الأقل.

وهناك مصدر آخر للصعوبة العملية يتمثل فى عدد مقدمات المتتابعة وعدد الثوابت الواردة فى كل من المقدمات والنتيجة. فليس من شك فى أن زيادة عدد المقدمات أو الثوابت بصورة كبيرة تنعكس بالزيادة تلقائياً على عدد الأعمدة التى يلزم توافرها فى قائمة الصدق لكى نصل إلى القرار الخاص بصحة أو عدم صحة المتتابعة. وغنى عن البيان أن اجتماع مصدرى الصعوبة المشار اليهما فى متتابعة معينة يجعل محاولة تصميم قائمة الصدق الكاملة الخاصة بها أمراً مرهقاً بصورة زائدة.

وهنا تنشأ الحاجة الى البحث عن حل لهذه المشكلة. ومن غير المناطقة يقوم بهذه المهمة ! يذهب المعاصرون منهم مذاهب شتى فى محاولة إيجاد بديل لأسلوب قوائم الصدق المباشرة، وقدموا بالفعل مجموعة طريفة من الوسائل التى تكفل أسلوباً ميكانيكياً لاختبار صدق الصيغ المركبة، واختبار صحة المتتابعات، مع تجنب الصعوبات التى أشرنا إليها تواً. والحق أن حظوظ هذه الأساليب تتفاوت من حيث نصيبها من البساطة والفاعلية، وهذا أمر لا يتسع المجال هنا لبحثه بصورة تفصيلية. غير أننا سنكتفى بعرض أسلوبين فقط: الأول هو قوائم الصدق المختصرة (١) والثانى هو الأشجار

---

(١) توجد عروض جيدة لهذا الأسلوب فى الكتابات العربية. هناك مثلاً كتاب المرحوم الدكتور عزمى اسلام (١٩٧٠)، ص ص ١٩٨ – ٢٦٦، وهو الجزء المخصص لقوائم الصدق عموماً. هناك =

الدلالية (١).

والقائمة المختصرة أسلوب ابتكره تشارلز ساندرس بيرس(٢) فى نهاية القرن التاسع لاختبار صحة الإستدلالات الواقعة فى نطاق حساب القضايا، ومعنى هذا أن الأسلوب غير المباشر ظهر تاريخياً قبل الأسلوب المباشر أو القائمة الكاملة الذى عرفناه فى عشرينات القرن العشرين. غير أن دلالته تتضح بصورة أكبر حين نقارنه بأسلوب القائمة الكاملة، لأنه يعتمد فى الواقع على مجموعة من خصائص دالات الصدق التى تمكننا من إختصار القائمة بصورة واضحة تصل فى كثير من الأحيان إلى سطر واحد فقط.

الفكرة العامة للأسلوب غير المباشر (أو المختصر) تكمن فى أن المتابعة تكون غير صحيصة إذا ظهرت العلامة (X) تحت ثابت اللزوم مرة واحدة على الأقل خلال سطور القائمة الكاملة. يكفى إذن ظهور هذه العلامة مرة واحدة فقط لكى نتأكد من عدم صحة المتابعة، وفى هذه الحالة يعبر السطر عن حالة عكسية أو مثال عكسى للمتابعةCounter-Example هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى إذا حاولنا توفير كل الظروف الملائمة لتركيب سطر مفترض من سطور القائمة تظهر فية هذه العلامة تحت ثابت اللزوم أو الاستنتاج، وثبت لنا استحالة ذلك، أى ثبت استحالة تكوين مثال عكسى كان من حقنا اعتبار المتابعة صحيحة. المهم ألا نترك احتمالاً واحداً

=أيضاً د. محمد مهران (١٩٧٨)، ص ص ١٤٩ - ١٥٢ وهذا الجزء مخصص لعرض القوائم المختصرة فقط.

(١) الأشجار الدلالية تختلف عن الأشجار التركيبية، وإن كانت هناك علاقة محددة بين النوعين، وهذا ما سنراه بعد حين.

(٢) أحمد أنور (١٩٨٣)، الفصل الثالث.

مـهـمـا كـان لتـحـقـيق ذلك إلا وطرقناه، وهذا مـا سنراه من خـلال الخطوات والإعتبارات التالية :

أولاً:

نبـدأ بافـتراض وجـود هذا السطر، أى السطر الذى نضـع تحت ثابت اللزوم فـيـه العلامـة "X" . وفى هـذه الحـالة تأخـذ الثـوابت الرئيـسـيـة فى المقدمات جميعاً القيمة "T" تلقائياً، أما الثابت الرئيسى للنتيجة فيأخذ القيمة "⊥" ، ذلك أن هذه هى الحالة الوحيدة التى تحقق وجود العلامة "X" . هذه الخطوة إجبارية إذن ولا سبيل للإختيار فيها بين أكثر من بديل.

ثانياً:

نتعامل مع كل صيغة (سواء كانت مقدمة أو نتيجة) على حدة، ونحاول تحديد قيم الصدق الخاصة بثوابتها ومتغيراتها التى تحقق قيمة الصدق الكلية للصيغة، والتى تم تحديدها فى الخطوة الأولى. لاحظ أننا نسير هنا عكس اتجاه الشجرة التركيبية، أى أننا نبدأ من الثابت الرئيسى، لكى نصل إلى قيم صـدق عناصر الصـيـغة الأبسط. ونستطيع أن نبدأ من أى صـيـغة شئنا، ولا قيد على اختيارنا هنا، ولكن توجد اعتبارات واختيارات تسهل مهمتنا، وتجعل طريقنا نحو إكمال المحاولة أو المحاولات المطلوبة أقصر، وهذا هو مانبحث عنه، ونستكشفه فيما يلى من خطوات.

ثالثاً:

نبدأ بالصيغة الأسهل، وهى الصيغة التى تتناسب قيمة صدق ثابتها الرئيسى مع قيم وحيدة لأطرافها المباشرة، بحيث إذا كانت قيمة صدق هذا الثابت هى الصدق مثلاً كانت قيم الأطراف التى يربط بينها محددة بالصدق

أو الكذب، وهذا وفقاً للخطوط العامة التالية:

- إذا كان الثابت الرئيسى نفياً كان العنصر الداخلى (أى الصيغة المنفية) ذا قيمة صدق مخالفة له سواء بالصدق أو الكذب.
- إذا كان الثابت الرئيسي وصلاً كان الطرفان المكونان له صادقين.
- إذا كان الثابت الرئيسى فصلاً كاذباً كان الطرفان المكونان له كاذبين.
- إذا كان الثابت الرئيسى تضمناً كاذباً كان مقدمه صادقاً وتاليه كاذباً.

هذه الحالات الأربع تأخذ أولوية مطلقة لأنها تؤدى إلى استخراج قيم محددة لصيغتها الأبسط تساهم فى الوصول إلى نهاية المحاولة بسرعة. أما ما عداها فتحتمل صيغة أكثر من قيمة.

رابعاً:

إذا لم تتوافر أى من الإحتمالات الأربعة السابقة لكى نبدأ بها نتأكد من أننا يجب أن نقوم بأكثر من محاولة لكى نستوعب كل إمكانيات أو احتمالات جعل المقدمات صادقة جميعاً والنتيجة كاذبة. وفى هذا الصدد نجد أن هناك مجموعة أخرى من الإحتمالات نلتزم فيها بمحاولتين أو ثلاثة فى سطرين مستقلين أو ثلاثة. هذه الإحتمالات هى:-

- إذا كان الثابت الرئيسى فى الصيغة هو التكافؤ الصادق فإن هناك احتمالين: الأول أن تكون قيمتا صدق الطرفين هى الصدق، والإحتمال الثانى أن تكون الكذب، ولهذا نلتزم بوضع هذه القيمة فى سطرين مختلفين.
- إذا كان الثابت الرئيسى تكافؤاً كاذباً كان لدينا إحتمالان مختلفان وهما كذب الطرف الأول مع صدق الثانى، أو صدق الأول مع كذب الثانى،

ولذلك نكون بحاجة إلى سطرين مختلفين.

- فى حالة أن يكون الثابت الرئيسى وصلاً كاذباً، أو فصلاً صادقاً، أو تضمناً صادقاً فهناك ثلاثة احتمالات نعرفها من قائمة الصدق الخاصة بكل ثابت، ولذلك نلتزم هنا بثلاث محاولات لكى نجعل المتتابعة غير صحيحة. وفى كل الأحوال نعامل كل محاولة كسطر مستقل لتحقيق صحة الفرض (X) تحت علامة اللزوم، أى لتحديد حالة عكسية للمتتابعة.

خامساً:

نمضى فى عملية التطبيق العكسى أو التراجعى لتعريفات الثوابت، أى البداية من الثابت واستنباط قيمة صدق أطرافه، وهذا فى اتجاه مقابل لاتجاه تكوين الشجرة التركيبية للصيغة، فإذا وصلنا الى تحديد قيمة صدق لأحد المتغيرات الواردة فى الصيغة سواء بالصدق والكذب نستطيع أن ننقل هذه القيمة كما هى الى بقية المواضع التى ورد فيها نفس المتغير دون قيد ولا شرط. وسنجد فى معظم الأحيان أن هذا يساهم بصورة فعالة فى إكمال المحاولة أى إكمال تحديد قيمة صدق الثوابت والمتغيرات الواردة بالصيغ كلها. لاحظ هنا أنك قد تتحرك مع اتجاه الشجرة التركيبية إذا كان لديك العدد الكافى من قيم المتغيرات. المهم أنه لا قيد على طبيعة الحركة التى تقوم بها مادامت كل خطواتك إجبارية.

سادساً:

تعتبر المحاولة (المحاولات) منتهية بعد أن يتم تعيين قيم صدق محددة لكل ثابت ولكل متغير يقع فى أى من الصيغ الواردة بالمتتابعة. ونصل إلى هذا الأمر بالتطبيق المتكرر لتعريفات الثوابت، ولعملية نقل قيم المتغيرات إلى

مواضعها الأخرى فى المتتابعة دون ترتيب ملزم. والإلزام الوحيد يأتى من أن كل خطوة يجب أن تكون إجبارية أى لا مجال لاحتمال قيم أخرى للرموز التى بين أيدينا. فإن اضطررنا لمواجهة هذا الأمر، علينا بإفساح المجال أمام كل هذه الإحتمالات فى محاولات منفصلة. ومهارة المنطقى تتجلى هنا فى محاولة تجنب هذه الإحتمالات قدر الإمكان عن طريق البحث عن القيم الاجبارية وتحديدها، ثم محاولة توظيفها فى مرحلة تالية. فى مثل هذه الحالات يجب إختيار بداية مناسبة، والقرار الخاص بهذا الإختيار يحتاج الى شئ من التدريب الذى يسهل الأمر علينا كثيراً.

سابعاً:

من المفترض الآن أن المحاولة (أو المحاولات) قد انتهت، أى أن كل القيم الخاصة بالثوابت والمتغيرات قد صارت محددة. السؤال فى هذه اللحظة سيكون: متى تكون محاولتنا ناجحة؟ ومتى لا تكون؟ ومادلالة نجاحها ودلالة عدم نجاحها؟

إن نجاح محاولة تكوين سطر يأخذ فيه ثابت الإستنتاج (X) معناه أن هناك سطراً واحداً على الأقل من سطور القائمة الكاملة تأخذ فيه كل المقدمات القيمة "T" والنتيجة "⊥" مما يعنى أن المتتابعة غير صحيحة، والسطر الذى تم تكوينه عبارة عن مثال عكسى Counter-example لهذه المتتابعة.

أما معنى عدم نجاح المحاولة (أو المحاولات) لتكوين هذا السطر (أو هذه السطور) فهو أن المتتابعة صحيحة منطقياً، وذلك لعدم وجود مثال عكسى لها، أى لعدم وجود سطر تصدق فيه المقدمات جميعاً وتكذب النتيجة.

تكون المحاولة ناجحة إذا وفقط إذا استوفت الشرطين التاليين معاً:-

الأول أن تكون تعريفات الثوابت متحققة بشكل صحيح فى القيم الموجودة تحت كل منها، وتحت المتغيرات والأطراف الداخلة تحت هذه الثوابت،

والثانى أن يأخذ كل متغير ورد بصيغ المتتابعة نفس قيمة الصدق سواء كانت "T" أو "⊥" فى كل مرة يرد فيها داخل المتتابعة.

فإذا استوفت محاولة معينة الشرطين السابقين معاً اعتبرت محاولتنا لتكوين مثال عكسى ناجحة، ومن ثم تكون المتتابعة غير صحيحة. أما إذا وجدت حالة واحدة على الأقل من ثابت لاتتطابق قيمته مع مقتضى تعريفه، أو حالة متغير يأخذ قيمتين مختلفتين فى موضوعين مختلفين أصبح السطر الذى افترضناه غير موجود ضمن قائمة الصدق، ومن ثم لا يمثل حالة عكسية للمتتابعة، ومن ثم تكون المتتابعة صحيحة. والشرط الوحيد أن تستوفى كل المحاولات الممكنة بالصورة التى أشرنا إليها تواً مادمنا لم نعثر على مثال عكسى، وإن حدث ووجدناه لا ضرورة لإكمال المحاولات، ونكتفى بسطر واحد تصدق فيه كل المقدمات، وتكذب النتيجة لكى تعتبر المحاولة ناجحة والمتتابعة غير صحيحة.

والآن ننتقل إلى تقديم بعض الأمثلة المتدرجة على أسلوب القائمة غير المباشرة، والتى يتضح منها مميزات هذا الأسلوب المختصر بالقياس الى أسلوب قوائم الصدق التالية.

مثال (١)

استخدم الأسلوب غير المباشر فى اختبار صحة المتتابعة التالية:-

$$P \& Q \models P v Q$$

الحل:

من الأفضل أن نقدم المحاولة مكتملة أولاً، ثم نشرح بعد ذلك الخطوات التى قمنا بها بالتفصيل الكافى.

P	&	Q	⊨	P	v	Q
T	T	T	x	⊥	⊥	⊥
٣	٢	٣	١	٤	٢	٤

١- فى الخطوة الأولى افترضنا أن هناك سطراً تأخذ فيه علامة اللزوم القيمة (X)، ووضعنا رقم الخطوة (١).

٢- فى الخطوة الثانية وضعنا قيمة الصدق "T" تحت الثابت الرئيسى فى المقدمة، والقيمة "⊥" تحت الثابت الرئيسى فى النتيجة، ورقم الخطوة موجود أسفلها.

٣- فى الخطوة الثالثة أخذنا ثابت الوصل الصادق، ولأنه لا يصدق إلا فى حالة إجبارية وحيدة وهى صدق الطرفين، بادرنا بوضع القيمة "T" تحت المتغيرين "P" ، و "Q" ، ورقم الخطوة تحت كل منهما.

٤- فى الخطوة الرابعة وضعنا القيمة "⊥" تحت المتغيرين الممثلين لطرفى العلاقة الفصلية لأنها كاذبة بناء على الإفتراض الذى وضعناه فى الخطوة الأولى. لاحظ أنه كان بإمكاننا تبديل الخطوتين الثالثة والرابعة ولكن هذا لا يمثل محاولتين مختلفتين لأن كلا الخطوتين إجبارى.

٥- هنا اكتملت المحاولة لأن كل الثوابت والمتغيرات محددة القيمة فى السطر

المفترض. ولكننا سريعاً ما نلاحظ أنها غير ناجحة لأنها لا تستوفى أحد الشرطين المشار اليهما، وهو اتساق قيم المتغيرات. ففى المقدمة نجد أن "P" يجب أن تكون صادقة، وفى النتيجة نجد أنها كاذبة، وكذلك الحال بالنسبة للمتغير "Q" .

قد نتصور أنه من الممكن أن نسلك طريقاً آخر بوضع قيم "P" ، و "Q" فى النتيجة كما وردت فى المقدمة، وليس كما يقضى تعريف الفصل، وفى هذه الحالة سيظهر تناقض المحاولة من باب آخر، وهو تعريف الفصل، الذى يجب أن يكون كاذباً فى الوقت الذى تصدق فيه كل من "Q"، و "P" . وبهذا لا نستطيع على الإطلاق تكوين سطر يأخذ فيه ثابت اللزوم "x" . إذن المتتابعة صحيحة منطقياً.

مثال (٣):

أثبت صحة المتتابعة التالية:

$$P \vee (Q \,\&\, R),\ R \rightarrow S \ \models P \vee (Q \,\&\, S)$$

الحل:

تحتوى عناصر المتتابعة على أربعة متغيرات مما يعنى أن القائمة الكاملة تقتضى تكوين ١٦ سطراً، كما يقضى عدد الثوابت بضرورة وجود سبعة أعمدة. ولذلك نحاول استخدام الأسلوب غير المباشر توفيراً للجهد على النحو التالى:

P v (Q & R)	R → S	⊨	P v (Q & S)
⊥T TTT	TTT	x	⊥ ⊥ T⊥T
٤ ٢ ٦ ٥ ٦	٧ ٢ ٨	١	٣ ٢ ٧ ٣ ٩

١- فى الخطوة الأولى افترضنا السطر الذى تأخذ فيه علامة اللزوم الرمز X بغرض تكوين نموذج عكسى.

٢- فى الخطوة الثانية حققنا الشرط الضرورى والكافى لذلك وهو كذب النتيجة وصدق المقدمتين، وهذا عن طريق وضع القيمة "⊥" تحت ثابت النتيجة الرئيسى، والقيمة "T" تحت الثابتين الرئيسين فى المقدمتين.

٣- انطلقنا من تحديد قيم طرفى الثابت الرئيسى فى النتيجة لأنه فصل كاذب، ومن ثم تأخذ "P" القيمة "⊥" ويأخذ الوصل القيمة "⊥" أيضاً.

٤- فى الخطوة الرابعة نقلنا قيمة المتغير "P" الى الموضع الذى ورد به للمرة الثانية فى المقدمة الأولى ..

٥- صار ممكناً فى الخطوة الخامسة تحديد قيمة الطرف الثانى من علاقة الفصل الصادقة فى المقدمة الأولى. الفصل صادق وفى نفس الوقت أحد طرفيه (أى P) كاذب، فمن الضرورى أن يكون الطرف الآخر وهو الوصل صادقاً، ذلك أنه إذا لم يكن كذلك كان الفصل كاذباً.

٦- لدينا الآن وصل صادق، ولهذا فطرفا الثابت (أى "R"، و "Q") يأخذان تلقائياً القيمة "T" .

٧- فى هذه الخطوة ننقل قيمة "Q" الصادقة الى موضع المتغير الآخر فى النتيجة، وكذلك قيمة المتغير "R" الصادقة الى الموضع الآخر فى المقدمة الثانية.

٨- لدينا المقدمة الثانية، وهى عبارة عن تضمن صادق، مقدمه صادقاً، فلابد أن يكون التالى صادقاً أيضاً، وإلا كان هناك تناقض.

٩- ننقل القيمة التى أخذها المتغير "S" الى الموضع الذى ورد به فى

النتيجة وهى الصدق.

اكتملت الآن محاولة تركيب المثال العكسى للمتتابعة، وباقى دور مراجعة الشرطين السابق تحديدهما. الشرط الأول،هو شرط توافق قيم المتغيرات متحقق بالنسبة للمتغيرات الأربعة. أما الشرط الثانى متحقق بالنسبة لكل الثوابت ما عدا الوصل الموجود بالنتيجة، فنتيجة الوصل هى الكذب، ومع ذلك فطرفاه صادقان، وهذا تناقض. إذن المحاولة فاشلة، مما يعنى أن السطر المفترض لا وجود له، والمتتابعة صحيحة منطقياً.

مثال (٣):

أختبر صحة المتتابعة التالية، وحدد الحالة العكسية إن وجد.

$$P \leftrightarrow Q, Q \rightarrow \sim R \models R \rightarrow P$$

الحل:

P	↔	Q	Q	→	~	R	⊨	R	→	P
⊥	T	⊥	⊥	T	⊥	T	x	T	⊥	⊥
٤	٢	٧	٦	٢	٥	٤	١	٣	٢	٣

١- فى الخطوة الأولى افترضنا السطر الذى يأخذ فيه ثابت اللزوم العلامة "x" .

٢- فى الخطوة الثانية تأخذ المقدمتان القيمة "T" لكل منهما، وتأخذ النتيجة القيمة "⊥" .

٣- النتيجة تمثل تضمناً كاذباً، ومن ثم تكون قيمة "R" هى "T" وقيمة "P" هى "⊥" بالنسبة للحالة العكسية المفترضة.

٤- ننقل قيمة "R" الى الموضع الآخر فى المقدمة الثانية، وقيمة "P" الى الموضع الآخر فى المقدمة الأولى.

٥- بما أن "R" صادقة فى المقدمة الثانية يكون نفيها كاذباً.

٦- المقدمة الثانية تضمن صادق تاليه (نفى "R") كاذب، فلابد أن يكون المقدم كاذباً (أى أن "Q" وتأخذ القيمة "⊥").

٧- ننقل قيمة "Q" الى موضع وقوعها فى المقدمة الأولى، وبذا تكتمل المحاولة لأن كل متغير وكل ثابت محدد القيمة.

فإذا شئنا تقييم المحاولة نجد أن كل متغير يأخذ نفس القيمة فى كل مرة يرد فيها، كما أن تعريفات الثوابت متطابقة مع قيم المتغيرات أو الاطراف التى تربط بينها. ومن ثم تكون المحاولة ناجحة، والسطر يمثل أحد سطور قائمة الصدق الكاملة إذن المتتابعة غير صحيحة. والحالة العكسية يحددها قيم المتغيرات فتكون هى :-

كذب كل من "P" ، و "Q" ، وصدق "R"

نضع فى الاعتبار أن ما رصدناه ليس الحالة العكسية بالألف واللام، بل حالة عكسية واحدة. قد يوجد غيرها، وقد لا يوجد. المهم أنها تكفى لاثبات عدم صحة المتتابعة، ولا تفيدنا شيئاً فيما يتعلق بوجود حالات عكسية أخرى.

مثال (٤):

أختبر صحة المتتابعة:

$$\models \{P \vee (Q \rightarrow R)\} \leftrightarrow \{\sim P \rightarrow (Q \,\&\, R)\}$$

الحل:

المتتابعة ليس لها مقدمات، ومعنى ذلك أنه فى حالة ثبوت صحتها نسميها مبرهنة. ويعتمد اختبار صحتها على قيم ثابتها الرئيسى فقط.

ولأننا بصدد النتيجة فإن ثابت اللزوم يأخذ العلامة "X" إذا وفقط إذا كان الثابت الرئيسى فى النتيجة كاذباً وهذا ما سنراه فى الخطوات التالية:

	$\models$	$\{P \vee (Q \rightarrow R)\} \leftrightarrow \{\sim P \rightarrow (\sim Q \,\&\, R)\}$						
المحاولة الأولى	X	⊥	⊥	T ⊥ ⊥	⊥	T⊥	T	T ⊥ T T
	١	٤	٣	٥ ٤ ٥	٢	٧ ٦	٣	٩ ١٠ ٨ ٩
المحاولة الثانية	X	⊥	T	T T T	⊥	T⊥	⊥	⊥ T ⊥ T
	١	٦	٣	١١ ٧ ٨	٢	٤ ٥	٣	٩ ١٠ ٤ ٨

١- فى الخطوة الأولى وضعنا العلامة "X" تحت ثابت اللزوم.

٢- فى الخطوة الثانية وجدنا أن الثابت الرئيسى فى النتيجة هو التكافؤ، ويجب أن يكون كاذباً إذا ما أردنا وضع العلامة "X" تحت اللزوم. وهذا يحدث فى حالتين الأولى صدق الطرف الأول، وكذب الطرف الثانى، والحالة الثانية هى كذب الطرف الأول وصدق الثانى. لهذا يجب أن نقوم بمحاولتين من خيث المبدأ.

٣- بدأنا بافتراض أن سبب كذب التكافؤ هو أن الطرف الأول وهو الصيغة

$\{P \vee (Q \rightarrow R)\}$ كـاذب، وأن الطرف الآخـر صـادق. وهذا يمثل المحاولة الأولى.

٤- كذب الفصل يعنى كذب الطرفين، ولهـذا تكون "P" كاذبة، والتضمن "$(Q \rightarrow R)$" كاذب.

٥- التضمن الكاذب يكون مقدمه (Q) صادقاً، وتاليه (R) كاذباً.

٦ ، ٧- أكملنا الآن قيمة طرف التكافؤ الأول، فننقل قيم المتغيرات الى المواضع الأخرى التى ترد فيها، ولتكن البداية بالمتغير "P" ، ثم نضع نقيض قيمته تحت النفى.

٨- لدينا فى طرف التكافؤ الثانى تضمناً صادقاً هو:

$$"\{\sim P \rightarrow (\sim Q \ \& \ R)\}"$$

وصلنا فى الخطوة السابقة الى أن مقدمه صادق، فمن الضرورى أن يكون التالى صادقاً أيضاً، وإلا كان لدينا تناقض. وهكذا نضع القيمة "T" تحت ثابت الوصل.

٩- تالى التضمن عبارة عن وصل صادق ومن ثم يكون الطرفان صادقان.

١٠- طرف الوصل الصادق الأول عبارة عن نفى "Q" ، ومن ثم تكُون "Q" كاذبة لأن نفيها صادق.

انتهت المحاولة الأولى لأن كل القيم تم تحديدها بشكل إجبارى بدءاً من الخطوة الثالثة. ولكننا نلاحظ فشل المحاولة لأن المتغير"Q" يأخذ قيمتين مختلفتين فى موضعين مختلفين، وكذلك المتغير "R" . السؤال الآن هو : هل تكون المتتابعة صحيحة؟ الإجابة : لا نعلم حتى الآن، لأنه تبقى المحاولة الثانية التى يجب علينا القيام بها، فقد تمثل حالة عكسية للمتتابعة، ومن ثم

وجب التحفظ فى إصدار الحكم النهائى. نكمل الآن الخطوات بدءاً من الخطوة الثالثة:

٣-أ- نفترض هنا صدق الطرف الأول وكذب الطرف الثانى.

٤-أ- طرف التكافؤ الثانى تضمن كاذب فيكون مقدمه "(P ~)" صادقاً، وتاليه "(~ P & R)" كاذباً.

٥-أ- نفى "P" صادق، إذن "P" كاذب.

٦-أ- ننقل قيمة "P" وهى "⊥" الى موضع ورودها فى طرف التكافؤ الأول.

٧-أ- لدينا فى طرف التكافؤ الأول فصل صادق أحد طرفيه "P" كاذب، ومن ثم يلزم أن يكون الطرف الآخر صادقاً.

٨-أ- لا نستطيع التقدم هنا فى خطوات إجبارية ولهذا فمن الممكن أن يكون لدينا أكثر من محاولة. ولكن لأن الخطوات الباقية قليلة نستطيع التحايل لتكوين سطر يحقق نجاح المحاولة. فإن كان ذلك فى مقدورنا، أصبحت المتتابعة غير صحيحة وإلا يجب إكمال كل المحاولات الممكنة، أى بإضافة سطور جديدة تمثل كل المحاولات الممكنة. لدينا فى الطرف الأول (من التكافؤ) تضمن صادق، وفى الطرف الثانى وصل كاذب، فنفترض صدق "R" فى كل منهما.

٩-أ- بما أن "R" صادقة فى المركب الوصلى يكون "Q ~" كاذباً.

١٠ ، ١١-أ- بناء على ما سبق فى (٩) تكون "Q" صادقة، فننقل القيمة نفسها إلى الموضع الآخر للمتغير "Q" .

انتهت الآن المحاولة الثانية. ونجد أن الشرطين المتعلقين بقيم صدق الثوابت والمتغيرات مستوفيان بالكامل، وبذلك تكون المحاولة الثانية ناجحة

ومن ثم يمثل السطر هنا أحد سطور قائمة الصدق، أى أن المتتابعة غير صحيحة منطقياً. والحالة العكسية التى يمثلها السطر هى:

كذب "P" ، وصدق كل من "Q" و "R"

وتجدر الإشارة إلى أن هذه المحاولة إذا لم تكن ناجحة وجب علينا تجربة محاولات أخرى بدءاً من الخطوة الثامنة (١)، لأننا لم نستنفذ حتى الآن وسائل تكوين النموذج العكسى الذى يثبت عدم صحة المتتابعة.

٤- الأشجار الدلالية

سبقت الإشارة إلى أن الدراسات المنطقية المعاصرة تقدم العديد من الوسائل المتنوعة لإختبار صحة المتتابعات بصورة غير مباشرة ومختصرة، وكلها تستند إلى الفكرة الأساسية التى تقوم عليها قوائم الصدق الكاملة أو المطولة، والتى عرضناها فى صفحات سابقة، وطبقناها على عدد من الأمثلة. وقد أتبعنا ذلك بتقديم معالجة لأحد أشهر وأقدم الأساليب المختصرة التى تعتمد على فكرة الصدق، وهو أسلوب القوائم غير المباشرة. ورأينا من خلال الأمثلة التى قمنا بعرضها وتحليلها أن هذا الأسلوب يساهم فى تبسيط الكثير من خطوات اختبار صحة المتتابعات.

غير أن هناك بعض المتتابعات التى يكون ثابت النتيجة الرئيسى فيها عبارة عن وصل أو تكافؤ، وثوابت المقدمات الرئيسية فصل أو تضمن أو

---

(١) تجدر الإشارة هنا إلى الأسلوب المختصر الذى عرضه الأستاذ الدكتور ماهر عبد القادر (١٩٨٥)، الفصل الثالث عشر، والمستقى من كواين، المنطقى الأمريكى العظيم، والذى يمثل تنويعاً على القائمة المختصرة، وله بعض المميزات عنها. وتوجد أمثلة توضيحية وتطبيقية كافية فى الفصل المشار اليه.

تكافؤ وهذا يعنى ضرورة تعدد المحاولات التى يلزم القيام بها لاختيار صحة مثل هذه المتتابعات، وقد يحتاج الأمر داخل كل محاولة إلى أن تقوم ببعض المحاولات الفرعية لكى لا نترك احتمالاً واحداً لنجاح تركيب النموذج العكسى الخاص بالمتتابعة طبقاً لما يقضى به الأسلوب السابق. ولاشك أن من شأن هذا أن تتعقد خطوات الأسلوب إلى حد كبير

ولهذا نقدم فى الصفحات التالية أسلوباً آخر بدأ انتشاره فى منتصف الخمسينات من هذا القرن تحت اسم اللوحات الدلالية Semantic Tableaux، ورواد هذا الاتجاه هم جاكو هنتيكا J. Hintikka(١)، وايفرت بث E. Beth(٢)، وغيررهما، استناداً إلى كتابات جنزن(٣) الرائدة. وقد ارتبط هذا الأسلوب بنظرية البرهان وخاصة عند ايفرت بث، وكذلك ببرهان الأكتمال Completeness Proof، وغيرهما من المسائل المتقدمة والهامة فى المنطق المعاصر مما لايسمح المجال فى هذه الدراسة التمهيدية للبحث فيه.

وقد تطور هذا الأسلوب لدى سمليان Smullyan(٤) وجفرى(٥)، اللذين استخدماه بتوسع فى التحليل الرياضى، وأخيراً لدى هودجز Hodges(٦)، الذى بسط من الأسلوب بصورة كبيرة. وفى الصفحات القليلة التالية لن نتوسع فى دراسة تطور هذا التكنيك البسيط

(1)Hintıkk,J.(1955)
(2)Beth,E(1955).
(3)Gentzen,G.(1934)
(4)Smullyan,R.(1968)
(5)Jefferey,(1967)
(6)Hodges,W.(1977)

والمتقدم، بل سنهتم بتبسيط أحد تنويعات اللوحات الدلالية، وهو الأسلوب الذى يسمى الأشجار الدلالية Semantic Trees وسنهتم به فقط من حيث أنه أسلوب بديل لقوائم الصدق المطولة والمختصرة معاً. ولن نتناول هنا الإستخدامات المتنوعة والمهمة الأخرى له(١).

الأشجار الدلالية، إذن، أسلوب لإختبار صحة المتتابعات، ويعتمد على فكرة الصدق، وأن لكل قضية بسيطة قيمتى صدق ممكنتين، وأن الصيغ المركبة دالات صدق للقضايا البسيطة الداخلة فى تركيبها بواسطة الثوابت المعروفة. ومثل القائمة المختصرة نجد أن الفكرة الأساسية فيه هى فكرة النموذج العكسى، وموجزها أن المتتابعة تكون صحيحة إذا لم يكن لها نموذج عكسى على الإطلاق، فإن كان لها نموذج عكسى واحد على الأقل صارت غير صحيحة.

وهنا لايتم العمل على أساس محاولة تكوين نموذج عكسى واحد، بل نحن نحاول تكوين أكثر من نموذج عكسى، أو بالأحرى نضع فى حسابنا منذ البداية كل النماذج العكسية الممكنة، ولهذا يتم العمل عن طريق التفريع من قمة الشجرة، وهى الحالة التى تكون فيها كل المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة،(أو نفى النتيجة صادق) والحركة التى نقوم بها عكس اتجاه الشجرة التركيبية، وليس معها. ولعل من الأفضل تقديم وصف عام لخطوات الشجرة

---

(١) يستحق أسلوب الأشجار الدلالية دراسة منفصلة لأنه يبسط الكثير من الإجراءات الصورية فى الأنساق التى يطبق عليها. ونحن نأخذ فى هذه الدراسة ما يعنينا فقط. وسنعود إليه فى دراستنا الخاصة بالمنطق العام، وهى تحت الإعداد الآن، وسنرى كيف يمكن تطبيق هذا الأسلوب على متتابعات نظرية الأسوار، وباقى نظريات المنطق وموضوعاته.

الدلالية قبل تناول أمثلة جزئية توضيحية(١).

أولا : نبدأ بوضع النموذج العكسى الذى نسعى لاكتشاف الحالة أو الحالات التى تحققه. ويكون وضع هذا النموذج بترتيب المقدمات ونفى النتيجة إما أفقياً أو رأسياً، وفى بحثنا هذا نضع مرتبة رأسياً. والمطلوب هو البحث عن حالة أو تركيب يحقق صدق هذه الصيغ جميعاً. فإذا ما نجحنا فى إيجاد مثل هذه الحالة كانت المتتابعة غير صحيحة. أما إذا أيقنا من إستحالة ذلك كانت المتتابعة صحيحة.

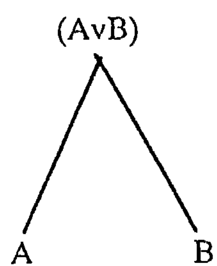
ثانيـاً : ممهمتنا الآن هى تفريع الشجرة الدلالية بدءاً بأسهل الصيغ تفريغاً، أو حسبما نرى لكى نصل إلى تفريع الصيغ جميعاً حتى نصل إلى تحديد قيمة المتغيرات كلها. ويلزمنا هنا تحديد قائمة خاصة بقواعد التفريع تسهل علينا الحركة. فيما يلى نورد هذه القواعد، وهى تسع قواعد تستنفد الصيغ المركبة جميعاً، ونفيها. لاحظ أن "A و B، و C"....... رموز تحل محل صيغ أو متغيرات، فهى رموز لرموز (٢)

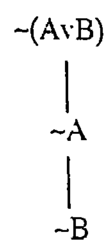
---

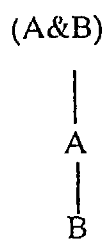
(١) قارن بين هذا الوصف، ووصف هودجز لنفس الأسلوب. راجع فى ذلك :

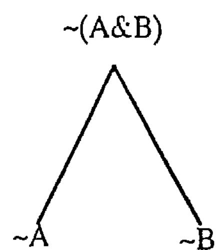
Hodges, W. (1977), PP. 45 - 60.

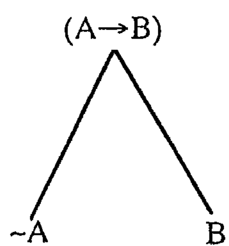
(2) Hodges, W. (1983), P. 24.

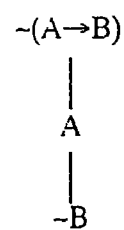

(AvB)
A
B

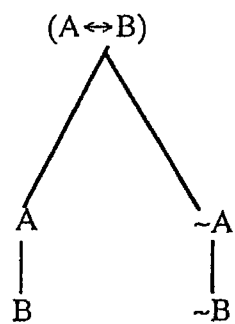

~(AvB)
~A
~B

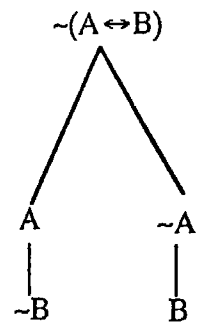

(A&B)
A
B


~(A&B)
~A
~B


(A→B)
~A
B


~(A→B)
A
~B


(A↔B)
A
B
~A
~B


~(A↔B)
A
~B
~A
B

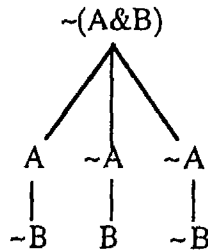

(~~A)
A

ثالثاً : أن قواعد التفريع ليست شيئاً جديداً، بل يجب فهمها في ضوء قائمة الصدق الخاصة بكل ثابت، والهدف منها هو تبسيط وسرعة تكوين الشجرة الدلالية. مثلاً الوصل الصادق تجد أنه لا يحتاج إلا إلى فرع واحد يجتمع فيه صدق طرفيه معاً. أما الوصل الكاذب فيتم التفريع إلى فرعين لأن كذب الوصل يحتاج إلى كذب أحد طرفيه أو (غيرالإستبعادية) كذب الآخر(١).

رابعاً : نكرر عملية التفريع سواء لكل صيغة جزئية ناتجة من التفريع الأول، أو لصيغ النموذج العكسى الأخرى جميعاً، وذلك حتى نصل في النهاية إلى تفريع كل الصيغ المكونة للنموذج العكسي، وحتى نصل إلى متغيرات مثبتة أو منفية، ولا تتبقى صيغة واحدة يمكن تفريغها إلى ما هو أصغر منها. علينا فقط ملاحظة أن الفرع الذى يظهر فيه

---

(١) قد يسأل سائل : ولماذا لا يتم التفريع إلى ثلاثة فروع على اعتبار أن كذب الوصل يحتاج إلى حالات ثلاث؟ الإجابة أن الفرعين يؤديان الغرض. الفرع الأول يتحدث عن حالة كذب الطرف الأول سواء كان الثاني صادقاً أو كاذباً(أى أنه يغطى حالتين). والفرع الثانى كذلك يغطى حالتين والمجموع ليس أربعة، لأن هناك حالتان إحداهما تكرار للأخرى فيكون التفريع محدداً لثلاثة احتمالات فقط. وبعبارة أخرى يمكن اعتبار قاعدة التفريع الخاصة بالوصل الكاذب اختصاراً للقاعدة التالية:



ولا شك أنها اختصار مفيد، لأنها (أى القاعدة التى نطبقها) تختزل الكثير مما هو غير مفيد مع عدم التفريط فى أى احتمال.

متغير ونفيه علينا أن نتوقف عن إكماله، ونضع خطأً تحته كدليل على إغلاقه نهائياً، لأنه لايعبز عن حالة متسقة للنموذج العكسى الذى يعبر عنه هذا الفرع بالذات.

خامساً : تقييم كل فرع يكون على حدة. إذا احتوى الفرع على متغير ونفيه يكون متناقضاً، ولا يشكل أساساً للنموذج العكسى المطلوب. أما إذا لم يحتوى على المتغير ونفيه يكون لدينا نموذج عكسى مقبول، ومن ثم تكون المتتابعة غير صحيحة الفرع المتناقض نغلقه بوضع خط تحته والفرع غير المتناقض، نضع تحته علامه "√" بعد التأكد من تطبيق القواعد على كل الصيغ الموجودة فى هذا الفرع بحيث يمثل فى ذاته محاولة ناجحة لجعل المتتابعة غير صحيحة أو بالأحرى لاكتشاف عدم صحتها.

سادساً: وقبل أن ننتقل إلى عرض بعض الأمثلة التطبيقية على هذا الأسلوب نتوقف فى مقارنة سريعة بينه وبين الأسلوب غير المباشر الخاص بقائمة الصدق المختصرة. إن ما يجعل المحاولة غير ناجحة فى القائمة المختصرة أحد أمرين: الأول هو وجود قيمتى صدق مختلفتين لنفس المتغير فى المحاولة عينها. والآخر هو تعارض قيم صدق المتغيرات مع تعريفات الثوابت المكونة لها.

أما فى حالة أسلوب الأشجار الدلالية فالأمر الثانى مستبعد لأننا نحرص فى البداية على عدم حدوث ذلك عن طريق قواعد التفريع التى نلتزم بها. أما الأمر الأول فنحن نفعل ما يتناظر معه فقط، أى نستند إلى وقوع المتغير ونفيه فى نفس النموذج وحقيقة الموقف أن العلاقة بين الأمرين أشبه

بالاوانى المستطرقة. إذا كانت المحاولة متناقضة فإن تجلى هذا الأمر سيكون فى تعريف الثوابت أو اختلاف قيمة صدق المتغير. فإذا تجنبنا واحدة يظهر تناقض المحاولة فى الأخرى. ولا شك أن الوصف الذى نحن بصدده عام ومجرد، ولهذا من الأفضل أن ننتقل الآن إلى بعض الأمثلة.

مثال ١ :

استخدم أسلوب الشجرة الدلالية لاختبار الصحة الدلالية للمتتابعة التالية:

$$P \models Q \rightarrow P$$

الأجابة :

النموذج العكسى لهذه المتتابعة يتحقق باجتماع صدق "P" مع كذب $P \rightarrow Q$ وهذا ما نضعه على رأس الشجرة.

$$P$$
$$\sim (Q \rightarrow P)$$
$$|$$
$$Q$$
$$|$$
$$\sim P$$

لاحظ أن "P" عبارة عن متغير، ولذلك لا يمكن تفريعها. أما نفى النتيجة فكما تقول القواعد يتحقق بفرع واحد هو صدق "Q" وكذب "P" . انتهت الآن محاولة تكوين النموذج العكسى المنشود. نتساءل الآن هل المحاولة ناجحة؟ هل يمكن أن يتحقق هذا النموذج؟ الإجابة أن هذا محال لأن "P" يستحيل أن تكون صادقة فى بداية الشجرة وكاذبة فى نهايتها،

ومن ثم تكون المتتابعة صحيحة دلالياً. نضع خطاً تحت المتغير المنفى الموجود فى آخر الفرع الوحيد كدلالة على هذا.

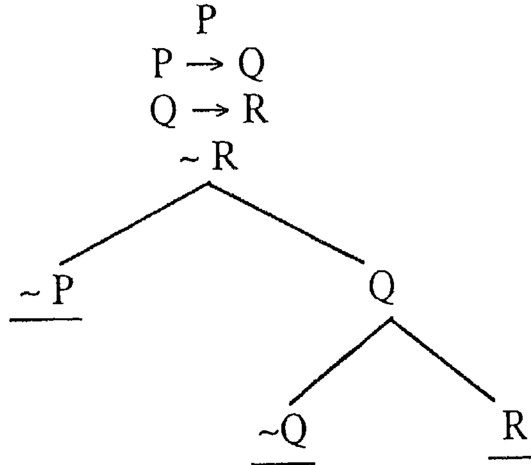
مثال ٢:

حاول إيجاد نموذج عكسى للمتتابعة التالية:

$$P , P \to Q, Q \to R \models R$$

الحل:

النموذج العكسى يتحقق بالآتى:



النموذج المطلوب يحتوى على "P" ، و "R ~" ، وهما لا يحتاجان إلى تفريع. نبدأ بالتفريع من "P → Q" ، التى يتحقق صدقها من كذب "P" أو صدق "Q" كما تخبرنا قواعد التفريع. الفرع الأول يتم إغلاقه فوراً لأن نفى "P" يتناقض مع وجود "P" مثبتة فى قمة الشجرة. أما الفرع الثانى فيمكن إكماله من حيث المبدأ. نأخذ الصيغة "Q → R" ، لنجد أن صدقها يتحقق إما بكذب "Q" ، وهذا تناقض يغلق الفرع، أو بصدق "R" وهذا أيضاً تناقض يؤدى إلى إغلاق هذا الفرع، مما يعنى أن كل المحاولات

لتكوين نموذج عكسى فاشلة، ومن ثم تكون المتتابعة صحيحة.

مثال ٣:

استخدم الشجرة الدلالية فى اختبار صحة المتتابعة التالية:

$$\sim (P \,\&\, R),\ P \rightarrow Q,\ R \rightarrow S \models Q \vee S$$

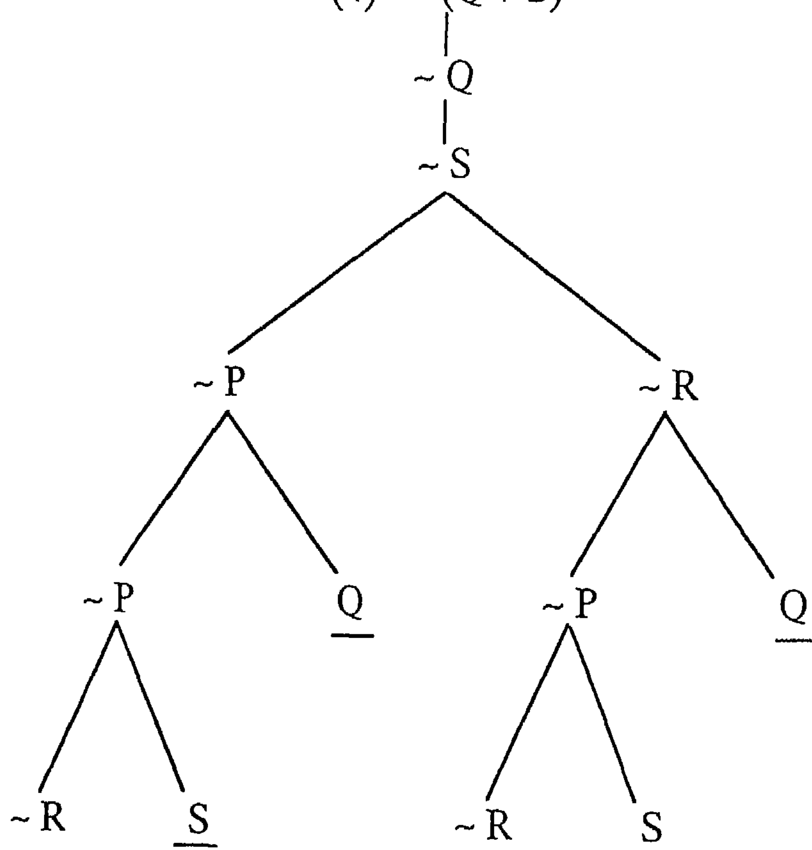
المطلوب: هو توافر الشروط الأربعة التالية لتحقيق النموذج العكسى:

(1) $\sim (P \,\&\, R)$

(2) $P \rightarrow Q$

(3) $R \rightarrow S$

(4) $\sim (Q \vee S)$



المتابعة غير صحيحة لتوافر نموذج عكسى هو الحالة التى تكون فيها كل المتغيرات الواردة بصيغ المتنابعة كاذبة، وهذا يمثل أحد سطور القائمة الكاملة التى يمكن تكوينها بسهولة بهدف مراجعة هذا الأمر. أو يمكن إستخدام أسلوب القوائم المختصرة. ومن المناسب هنا أن نذكر إحدى مزايا الشجرة الدلالية، وهى تتمثل فى أنها تقدم لنا كل النماذج العكسية للمتتابعة، بمعنى أنها تقدم لنا ما يناظر كل السطور التى تصدق فيها كل المقدمات وتكذب النتيجة فى القائمة الكاملة. وفى حالة المتتابعة التى بين أيدينا يوجد نموذج عكسى واحد، ولهذا نجد أن علامتى (√) الواردتين فى الشجرة تعبران عن نموذج واحد فقط لأن قيمة المتغيرات فيهما متكافئة.

لاحظ أيضاً أننا اتبعنا ترتيباً معيناً فى تفريع صيغ المتتابعة يتناسب فقط مع اختيارنا الحر، ومع تقديرنا بأن هذا يمثل طريقاً أسرع لتفريع الشجرة، وهو غير ملزم، أى أن باستطاعتنا أن نبدأ بطرق أخرى، أى بترتيب مختلف لتفريع الصيغ مما سينعكس على شكل الشجرة، ولاشك. ولكن المهم أن النتيجة النهائية لن تكون مختلفة على الاطلاق، لأنه لا وجود سوى لنموذج عكسى واحد للمتتابعة المذكورة. ،الحكم هنا ينسحب على عمليات التحليل الدلالى التى نقوم بها ازاء أى متتابعة أخرى.

الملاحظة الأخيرة أنه كان بإمكاننا الإكتفاء بالفرع الأول من اليسار، وهو الفرع الذى نجحنا فيه فى تكوين النموذج العكسى للمتتابعة، وما يستتبع ذلك من عدم إكمال الشجرة، ولكننا آثرنا إكمال عملية تحليل الشجرة الدلالية حتى تتضح طريقة تنفيذها، وحتى نرى إمكان وجود أكثر من نموذج عكسى لمتتابعة وإمكان تكوين نموذج معين فى أكثر من فرع

الشجرة على النحو الذى أوضحناه توا.

مثال ٤ :

استخدم الشجرة الدلالية فى اختبار صحة المتتابعة التالية:

$$Q \leftrightarrow R, R \leftrightarrow \sim S, S \rightarrow P \models \sim (Q \rightarrow P)$$

الحل:

الشجرة الدلالية لهذه المتتابعة تكون على النحو التالى: لابد من وجود نموذج أو حالة تتحقق فيها الشروط الأربعة التالية، والمطلوب فى الشجرة هو محاولة اكتشاف هذا النموذج.

1- $Q \leftrightarrow R$
2- $R \leftrightarrow \sim S$
3- $S \rightarrow P$
4- $\sim\sim (Q \rightarrow P)$

$(Q \rightarrow P)$

$\sim Q$ ؟ | P

P: $\sim S$ | P

P: $\sim R$ — $\sim\sim S$ ؟ | R — $\sim S$

$\sim S$: $\sim Q$, $\sim R$ | Q, R

المطلوب الوصول إليه بالنسبة للمتتابعة هو : هل هى صحيحة؟ الإجابة المباشرة: لا. والنموذج العكسى يتمثل فى صدق "P" ، و "Q" ، و "R" وكذب "S" . ولكن هناك بضع ملاحظات على الشجرة الدلالية التى نحن بصددها، وعلى عملية التفريع التى تم إنشاؤها نسجلها هنا بسرعة.

الأولى أن بعض الفروع لم يتم إكماله ووضعنا تحته علامة إستفهام لا تدل إلا على أن الفرع غير مكتمل. الملاحظة الثانية أن النموذج العكسى تحقق، وهذا ما جعلنا نتوقف عن المحاولة تجنباً لما لا طائل وراءه. فإذا كان المطلوب هو كل النماذج العكسية صار لزاما علينا إكمال كل عمليات التفريع التى تركناها. الملاحظة الثالثة مرتبطة بهذا الأمر، وهى ترينا أنه الشجرة ستكون معقدة أيضاً، مما يعنى أن كل وسائل اختبار صحة المتتابعات دلالياً تنطوى فى بعض الأمثلة على صعوبات. ليس هناك طريقة مثالية خالية من كل عيب. كل طريقة لها مميزات بالنسبة لأنماط معينة، ولها عيوبها بالنسبة لأنماط أخرى.

خاتمــة

بعد هذا العرض لأسلوبى القوائم المختصرة والأشجار الدلالية نلاحظ أنهما يتفقان فى الخط العام، وإن كان الثانى أكثر تطوراً من الأول. إنهما يعتمدان على مفهوم الإتساق وفكرة النموذج العكسى. النموذج العكسى لمتتابعة يتكون من مجموعة من الصيغ التى تضم كل مقدمات المتتابعة بالإضافة الى نفى النتيجة، ولا شئ غير ذلك. أما مفهوم الاتساق فقد تعرضنا له فى الفصل السابق فيما يتعلق بصيغة واحدة. الصيغة المتسقة هى الصيغة التى توجد حالة واحدة لمتغيراتها تحقق صدق الثابت الرئيسى فيها بعد تطبيق تعريفات الثوابت جميعاً بترتيب تحكمه الشجرة التركيبية للصيغة. أما اتساق مجموعة الصيغ فغير بعيد عن هذا، وهو يتحقق إذا توافرت حالة واحدة على الأقل لمتغيرات الصيغ جميعاً يتحقق بها صدق الثوابت الرئيسية لكل الصيغ.

والآن: ماذا يتحقق بتزاوج فكرة النموذج العكسى مع مفهوم الاتساق؟ الإجابة ببساطة تتحقق فى الثمرة التى يقدمها الأسلوبان المختصران، وهى الاختبار الحاسم لصحة المتتابعات. إذا كان النموذج العكسى لمتتابعة متسقاً كانت المتتابعة نفسها غير صحيحة invalid . أما إذا كان هذا النموذج غير متسق، بمعنى استحالة تحقق هذا النموذج بالنسبة لأى حالة من حالات متغيراته، كانت المتتابعة صحيحة (١). وهنا يتضح بجلاء الارتباط الوثيق بين مفهومى الصحة المنطقية والإتساق حتى أن هودجز يذهب إلى أن المنطق يمكن تعريفه بأنه دراسة مجموعات الاعتقادات المتسقة (٢) ، ويعتبر أن هذا

(1) Hodges, W. (1977), p. 56.
(2) Ibid, p. 13.

التعريف ليس ببعيد عن التعريف الأكثر شيوعاً والقائل بأن المنطق هو دراسة الاستدلالات الصحيحة ، بل إنهما متكافئان، على النحو الذى أوضحناه تواً.

وينبهنا المناطقة دائماً الى أهمية الاتساق فى الاعتقادات والأقوال بل والأفعال، وهو أمر مرغوب فى حد ذاته، ومرتبط بقضية العقلانية rationality التى أشرنا اليها فى بداية هذا الفصل. ويذكرنا باتريك سوبيز (١) فى سياق آخر بأن مهمة محامى الدفاع مثلاً تكون عادة الكشف عن عدم اتساق أقوال شاهد أو شهود إثبات معينين. وعادة ما تأخذ المحاكم بهذا المبدأ، فتبرئ المتهم بناء على تناقض أو عدم اتساق أقوال الشاهد أو الشهود. والفكرة هنا أن هذه الأقوال تمثل فيما بينها مقدمات متتابعة يلزم عنهاعن هذه المقدمات نتيجة مفادها إدانة المتهم. وما دامت المقدمات غير متسقة، كما يأمل المحامى أن يثبت، فالنتيجة لا تلزم عنها سواء كانت صادقة أو كاذبة، ذلك أن المتابعة ذات المقدمات غير المتسقة تكون صحيحة بغض النظر عن صدق أو كذب النتيجة. ومن هنا يرتبط نجاح المحامى بإقناع القضاة أو المحلفين بتناقض المقدمات بتبرئة المتهم، أو على الأقل بهز الثقة فى إدانته.

كلمة أخيرة نقولها فى ختام هذا الباب فقد اهتممنا طوال فصلين كاملين بنظرية الدلالة مطبقة على حساب القضايا فقط، واستعرضنا مفاهيم الصدق المنطقى والصحة والاتساق فيما يتعلق بنظرية الاستنباط الأساسية. أما من الناحية التطبيقية فقد عرضنا أكثر من أسلوب لاختبار صدق الصيغ

---

(1) Suppes, P., p.27

أو صحة المتتابعات تتسم جميعاً بالدقة والضمان رغم تفاوتها فى السهولة والبساطة. كان موضوعنا فى كلمة واحدة هو اللزوم الدلالى.

فى الباب التالى ننتقل الى مهمة أصعب كثيراً، وهى بحث الجناح الآخر لمفهوم اللزوم، وهو اللزوم الإشتقاقى. الترتيب هنا مقبول من زاوية كلاسيكية النسق الذى نعرضه فى هذه الدراسة، وهى تتمثل كما قلنا مراراً فى تقديمها للصدق على البرهان. وهو مقبول من زاوية أخرى تتمثل فى أن التحدى الذى نتصدى لمواجهته فى الباب التالى يتمثل فى محاولة تطوير نسق صورى لاشتقاق نتائج كل المتتابعة الصحيحة بالمعيار الدلالى من مقدماتها. وهذا ما سنفعله الآن.

الباب الثالث
نظرية البرهان

الباب الثالث
نظرية البرهان

تقديم

خصصنا الباب الأول من هذه الدارسة للتعريف باللغة المنطقية، من حيث مفرداتها، ومن حيث قواعد تركيبها بما يمكننا بشكل حاسم من التمييز بين الصيغ صحيحة التركيب، والصيغ فاسدة التركيب. الصيغ صحيحة التركيب هى ما يعنينا، أولاً لأنها هى الوحيدة ذات المعنى، وثانيا لأنهاوحدات تكوين المتتابعات المنطقية. أما الصيغ غير الصحيحة فلا مجال لها داخل النظرية المنطقية، مثلها فى ذلك مثل الجمل والتراكيب غير النحوية فى اللغة العربية وغيرها من اللغات الطبيعية.

فى الباب الثانى انصب اهتمامنا على الصيغ صحيحة التركيب من حيث معناها أو دلالتها. كل صيغة صحيحة التركيب لها معنى أو دلالة، أى أن هناك شروطاً لصدقها تجعل قسماً من هذه الصيغ صادقاً دائماً، أى فى كل حالات متغيراته، وقسماً متسقاً، يصدق فى بعض حالات متغيراته، وقسماً غير متسق،لا يصدق فى أى حالة من حالاته. بعد ذلك انتقلنا إلى البحث فى مفهوم الصحة الدلالية. وهو مفهوم يقوم على استثمار فكرة شروط صدق الصيغ فى تحديد مدى المتتابعات التى تتكون من هذه الصيغ. ورأينا أن فكرة دالات الصدق تستطيع أن تقرر لنا بوسائل متنوعة مدى صحة أى متتابعة مهما كانت. وبهذا نكون قد عرفنا الصحة الدلالية، أو اللزوم الدلالى.

أما الباب الحالى فمخصص للبحث فى الجناح الثانى لمفهوم الصحة المنطقية، وهو مفهوم الصحة الاشتقاقية Derivational Validity ، وهو الذى يتولد عنه مفهوم اللزوم الاشتقاقى، وهو بدوره ما يقضى بأن نتيجة أى متتابعة صحيحة منطقياً يمكن اشتقاقها من مقدماتها، ليس بناء على علاقات دلالية معينة، بل على أسس تركيبية، ولذا تسمى الصحة الاشتقاقية أحياناً بالصحة التركيبية Syntactical Validity وهذا ما سيتضح معناه بالتفصيل بعد قليل.

قبل أن نفعل هذا نوضح أن النسق المنطقى ينتج عدداً لا متناهياً من المتتابعات الصحيحة. ومعنى هذا أنه ليس بالامكان وضع قائمة تضم تلك المتتابعات، ولكن النسق يمكننا من احتواء هذا العدد اللامتناهى بطريقة غير مباشرة وإن كانت بسيطة إلى حد كبير. نحن نعرف أن هناك عدداً لا متناهياً من المتتابعات صيغها صحيحة التركيب. يمدنا مفهوم الصحة الدلالية بوسيلة لتقرير ما إذا كانت أى متتابعة صحيحة أم لا. من زاوية دلالية. ومن ناحية أخرى يمدنا مفهوم الصحة الاشتقاقية بالوسائل الكافية لاشتقاق النتيجة من المقدمات أى للبرهان على أن النتيجة تلزم (تركيبياً) عن المقدمات.

وإذا حدث وبدأنا من متتابعة لدينا برهان على صحة اشتقاق نتيجتها من مقدماتها دون مساعدة من افتراضات أخرى، سيوفر لنا الاختبار الدلالى القائم على شروط الصدق وسيلة لتأكيد هذه النتيجة، أى لتأكيد اتفاق الصحة الدلالية مع الصحة الاشتقاقية. وتكتمل دائرة مفهوم الصحة المنطقية بإثبات نتيجة تعتبر واحدة من أهم نتائج المنطق فى القرن العشرين،

وهى اتساق نسق المنطق – ويهمنا هنا حساب القضايا، واكتماله، ومعنى هذا تكافؤ اللزوم الدلالى مع اللزوم التركيبى (سنرمز له بالرمز –|. أى أن كل المتتابعات الصحيحة دلالياً هى نفسها كل المتتابعات الصحية تركيبياً.

الأنساق الأكسيو ماتيكية

ويعرف موضوعنا فى هذا الباب بنظرية البرهان Proof Theory . والمقصود هنا تلك النظرية التى تمدنا بالأدوات الصورية اللازمة للبرهنة على صحة المتتابعة، أى لإشتقاق نتيجة المتتابعة من مقدماتها وفق قواعد اشتقاق محددة سلفاً. وهناك اتجاهات متعددة لعرض نظرية البرهان [1]، نذكر منها اتجاهين رئيسين : الأول هو الأقدم تاريخاً ويعود إلى هلبرت، وفريجه، وهو ما يعرف بنسق البديهات Axiomatic System . أما الإتجاه الثانى، وهو الأحدث تاريخياً، فينسب أساساً إلى كل من جيرارد وستانسلاف جاسكوفسكى Stansilaw Jaskowski. ويسمى بنسق الاستنباط الطبيعى Natural Deduction System.

أما أنساق البديهيات، أو الأنساق الأكسيوماتيكية، والمعروفة بأنساق هلبرت – فريجة Hildert- Frege Systems فهى الأنساق التى تعتمد على مجموعة من البديهيات Axioms أو المصادارت Postulates التى يلتزم المنطقى بقبولها فرضاً، إما لبداهتها ووضوحها الذى لا يحتاج إلى

---

(١) لمزيد من التفصيل حول انساق الاستنباط أو نظريات البرهان المختلفة مع عرض مقارن لهذه الانساق وميزات كل اتجاه وكذلك عيوبه راجع الدراسة الهامة لجوران صندهولم
Sundholm, G. (1983).

وهو دراسة على درجة عالية من التخصص.

برهان، أو لأنها مجرد مصادرات تقبل هكذا. ولا شك أن نسق البرنكبيا المعروف جيداً فى الكتابات العربية حول الموضوع يدخل فى هذا النوع من أنساق البرهان. ومعلوم لنا جميعاً أن هذا النسق يعتمد على ثابتين أوليين فقط هما النفى والفصل وله خمسة بديهيات ثبت إمكان اختصارها الى أربعه عن طريق الاستغناء عن البديهية الرابعة بسبب ثبوت عدم استقلالها من البديهيات الأخرى وعدم الاستقلال هنا معناه إمكان اشتقاق هذه البديهية عن رفيقاتها وبديهيات هوايتهد وراسل هى:-(١)

1- $\vdash$ $(p \vee p) \rightarrow P$

2 - $\vdash$ $Q \rightarrow (p \vee Q)$

3 - $\vdash$ $(p \vee Q) \rightarrow (Q \vee p)$

4 - $\vdash$ $\{p \vee (Q \vee R)\} \rightarrow \{Q \vee (P \vee R)\}$

5 - $\vdash$ $(Q \rightarrow R) \rightarrow \{(P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)\}$

والى جانب هذا النسق يوجد العشرات من أنساق البديهيات التى تتجه الى البحث عن درجة أكثر من البساطة، وعدد أقل من البديهيات. ونذكر فى هذا الصدد نسقين شهيرين يعودان الى ألونزو تشيرش. الأول يعتمد على ثابتى التضمن والكذب، وبديهيات هذا النسق هى :(٢)

1 - $\vdash$ $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

2 - $\vdash$ $\{S \rightarrow (P \rightarrow Q)\} \rightarrow \{(S \rightarrow P) \rightarrow (S \rightarrow Q)\}$

3 - $\vdash$ $\{(P \rightarrow \Lambda) \rightarrow \Lambda\} \rightarrow P$

ويسمى تشيرش هذا النسق باسم P_1 أما النسق فيسميه P_2 وهو عبارة عن تعديل لنسق فريجة على أساس واقعية لوكاشيفتش(٣). ويعتمد

(1) Whitheed & Russill (1910),P.13
(2) Church, A. (1956), P.72
(3) I bid, P.156

النسق P_2 على ثابتى التضمن والنفى، وبديهياته هى(١):

$$1- \vdash \quad P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$
$$2- \vdash \quad \{S \rightarrow (P \rightarrow Q)\} \rightarrow \{(S \rightarrow P) (S \rightarrow Q)\}$$
$$3- \vdash \quad (\sim P \rightarrow \sim Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

وقد وصل الأمر ببعض المناطقة الى اقتراح نسق يعتمد على بديهية واحدة فعل هذا نيكو Nicod عام ١٩١٧، وإن كانت بديهياته أقرب ما تكون الى وصل لعدد من البديهيات المستقلة. وتم اصلاح هذا العيب فى نسق نيكو من خلال النسق الذى قدمه لوكاشيفتش وفازبرج عام ١٩٣٢.(٢)

ولاشك أن عدد البديهيات يفضل أن يكون صغيراً، على ألا يكون ذلك على حساب بساطة النسق الاستنباطى وسهولة اشتقاق نظريات وبديهيات النسق من هذه البديهيات أو المصادرات(٣). وهذه العملية تتم أساساً عز طريق البحث عن البديهية أو المصادرة التى يجب أن نبدأ بها لكى نصل منها فى النهاية إلى المطلوب إثباته. وهنا تمكن الصعوبة الكبرى فى عملية اكتشاف البراهين، ولهذا نجد الكتابات العربية تتجنب التعرض بالتفصيل لنظرية برهان متكاملة تحدد من خلالها الطرق التى نسلكها عادة فى إشتقاق النتائج أو المبرهنات التى نحن بصدد البرهان عليها.

وعادة ما يشترط فى مجموعة بديهيات النسق أن تكون مستقلة

(1) Ibid, P.119
(2) Ibid,. p159

(٣) من الدراسات العربية الهامة التى تعرضت لأنساق اكسيوماتيكية بصورة مبسطة : د. محمد مهران (١٩٧٨) ، ود. ماهر عبد القادر (١٩٨٥) ود. محمد قاسم (١٩٩١) وغيرها من الدراسات

Lndependent ، بمعنى ألا يكون ممكناً اشتقاق إحداها من بقية المجموعة (١) وإلا صارت زائدة ويكمن الإستغناء عنها. الشرط الثانى فى مجموعة البديهيات أن تكون متسقة "Consistent أى أن أحدها لا يؤدى بواسطة قواعد الاشتقاق الى نقيض أى من البديهيات الأخرى، أو ما يمكن أن يشتق منها. أما الشرط الأخير فهو الإكتمال Completeness ، وهى الخاصية التى تكفى بموجبها مجموعة البديهيات لاشتقاق كل مبرهنات النسق المنطقى دون حاجة إلى مساعدة من بديهيات أو مصادرات أخرى سوى القواعد الخاصة بالاشتقاق والمحددة سلفاً.

وكما ألمحنا فى السطور السابقة، تعانى الأنساق الاكسيو ما تيكية من عيب خطير وهو أنه إذا كنا مهتمين بالقيام بعملية الاستقاق وتنفيذ براهين معينه نجد أن هذه الأنساق صعبة للغاية، لأنه حتى بالنسبة لأبسط الاستدلالات يجب أن نعود بها إلى المجموعة المحددة من البديهيات (٢) وهذا معناه أننا حين نريد البرهنة على نتيجة معينة يجب أن نكون قادرين على رؤية البديهية أوالمصادر التى نبدأ منها، وعلى معرفة بسلسلة الخطوات التى سنقوم بها لكى نصل إلى إثبات المطلوب .

هذا أمر صعب من الناحية العملية، ويخاصة بالنسبة للمبتدئ الذى لا توجد لديه خلفيه رياضية قوية . ومن ناحية أخرى يبتعد هذا كثيراً عن

---

(١)تجدر الاشارة هنا إلى ماهو معروف من أن أحد الباحثين قد كشف لرسل وهوايتهد عن أن إحدى بديهياتها الخمسة يمكن اشتقاقها من بقية البديهيات مما حدا برسل إلى التنوية بذلك فى الطبعة الثانية من كتاب البرنكيبيا.

(2) Sudholm, G:(1983),p.148..

الأسلوب الطبيعى الذى يمارس به استدلالاتنا فى الحياة العملية . وربما يكون هذا الاعتبار أحد الدوافع للبحث عن أسلوب آخر لعرض نظرية البرهان يحقق الأهداف التالى ذكرها :-

١ - أنه يمكننا من القيام بتركيب براهين فعلية لعدد كبير من الاستدلالات .

٢ - أنه يقترب بنا كثيراً من العمليات الاستدلالية الطبيعية التى نقوم بها فى حياتنا العملية [1]ومن هنا جاءت التسمية بالمنطق الطبيعى أو الاستنباط الطبيعى .

٣ - أنه يسهل لنا البرهنة فى الميتا نظريةMetatheaory على اتساق واكتمال النسق النظرى .

---

(1) Thomasou, R. (1970),p.19

أنساق الاستنباط الطبيعى :

أما الأسلوب الثانى فمعروف باسم الاستنباط الطبيعى ، ويعود إلى المنطقى الألمانى المبدع جيرارد جنزن Gerhard Gentzen (١) وهو عبارة عن اتجاه عام يتميز بعدم وجود بديهيات ينطلق منها بناء النسق بالصورة الموجودة عند أصحاب الاتجاه الاكسيوماتيكى . وله صور عديدة، ينسب منهاإلى جنزن وحدة ثلاث صور مختلفة ، كما أن لجاسكوفسكى نسقة الخاص الذى توصل إليه فى توقيت معاصر تماماً لجنزن ، وتم ذلك فى دراسته المعروفة بعنوان On The Rules of Suppositions in Formal Logic,1934.

وغير أننا سنعتمد على أحد أنساق جنزن التى أكتسبت شهرة أكبر لدى المناطقة فى العقود التالية لصدور دراستى كل من هذين المنطقين

---

(١) ولد جيرارد جنزن عام ١٩٠٩ وتوفى عن عمر قصير عام ١٩٤٥، ومع ذلك شكلت اسهاماته فى المنطق والميتارياضيات علامات فارقة فى تاريخ هذه الدراسات ولاتزال اسهاماته المبتكرة موضع بحث واستثمار حتى يومنا هذا وقد نشر شابو M.E Sxano مجموعة من مقالات جنزن عام ١٩٦٩ مترجمة إلى اللغة الإنجليزية وقد بدأ جنزن جهوده العلمية فى مرحلة مبكرة جداً من حياته وبالتحديد وعمره اثنين وعشرين عاماً فنشر مقالاً عنوانه .

On The existence of Independent Axiom Systems for Infinite Sentence Systems.

ونجد فى هذه المقالة عرضاً لفكرة اللزوم المنطقى ، سبق بها الفرد تارسكى الذى لم ينشر نظريته إلا عام ١٩٣٦ وتوالت دراسات جنزن المبتكرة . ومن هذه الدراسات ما يعتبر المصدر التاريخى الأساسى لكل أنساق الاستنباط الطبيعى المنتشرة فى العالم الآن ولاشك أن دراستنا تستلهم مقالة جنزن الهامة ، وهى بعنوان .

Investigations into Logical Deduction

والتى نشرت عام ١٩٣٤

الرائدين.

وتفضيلنا لهذا الأسلوب لا يعنى أننا نغمط أنساق أسلوب هلبرت وفريجة Hilbert Frege Systems حقها، فلها قيمتها التاريخية والنسقية ونقول مع جنزن: "إن صياغة الاستنباط المنطقى التى تعود إلى فريجه ورسل وهلبرت قد حققت فوائد صورية عظيمة وبالرغم من ذلك فهى بعيدة جداً عن الصورة التى يمارس بها الاستنباط فى البراهين الرياضية (والعملية أيضاً) والنسق الذى يقدمه جنزن يقترب قدر الإمكان من الاستدلال الفعلى.ناتج ذلك هو ما يسمى بالاستنباط الطبيعى (١) وقد حرص جنزن على تقديم صياغة لهذا الاستنباط خاصة بالمنطق الكلاسيكى، وصياغة أخرى للمنطق الحدسى ونحن معنيون بعرض نظرية حساب القضايا الكلاسيكية بالدرجة الأولى، وإن كنا ستوقف قليلاً غند المنطق الحدسى .

والآن ماذا عن هذا النسق الاستنباطى الذى لا يستند إلى بديهيات أو مصادرات ؟

يعتمد هذا النسق على مجموعة من القواعد الخاصة بالاشتقاق ولكننا هنا لا نشتق مبرهنات من بديهيات معينة، بل نشتق نتيجة أى متتابعة من مقدماتها فقط دون مساعدة مقدمات أو فروض أخرى وهذا أمر يشبه مانفعله فى حياتنا العامة فنحن نريد الاستدلال من مقدمات على صحة نتيجة معينة، يمدنا النسق بقواعد تساعدنا فى اشتقاق النتيجة من هذه المقدمات وحدها، وبذا تتوثق الصلة بين المقدمات والنتيجة ولا نبحث فى

(1) Gentzen, G. (1934), p. 68.

مكان بعيد عن بديهيات أو مصادرات ليس لها علاقة مباشرة أحياناً بالنتيجة.

نعاود الحديث أولاً عن مفهوم المتتابعة Sequent ، وهى هنا المتتابعة الاشتقاقية أو التركيبية، ورمزها " ⊢ " التى تختلف عن المتتابعة الدلالية ورمزها " ⊨ " والمتتابعة الاشتقاقية، إذا كانت صحيحة عبارة عن منظومة من الصيغ المنطقية تشتق إحداها وهى النتيجة من المجموعة المتبقية من الصيغ وهى المقدمات وذلك بواسطة قواعد اشتقاق محددة .

والقواعد الأساسية التى نستخدمها عبارة عن أزواج من قواعد التقديم Introduction rules ، وقواعد الحذف Elimination rules، الخاصة بكل ثابت منطقى على حدة،الفكرة أن لكل ثابت قاعدة تقديم وقاعدة حذف،تقول كل قاعدة إنه بتوافر مجموعة معينة من المقدمات يمكن فى حالة معينة أن نجرى على نتيجة المتتابعة عملية تقديم لهذا الثابت إلى صيغة النتيجة نفسها أو عملية حذف للثابت من نفس الصيغة .

وعملية البرهان تتمثل فى تجميع عدد معين من المقدمات عن طريق زيادة البعض أو رفع البعض الآخر بما ينعكس إما بحذف ثابت أو تقديم آخر على بنية النتيجة حتى نصل فى آخر سلسلة البرهان الى السطر الأخير الذى تمثل مقدماته كل مقدمات المتتابعة المطلوب البرهان عليها ، والنتيجة هى نفس النتيجة المطلوب الوصل إليها . وسلسلة الخطوات عبارة عن سلسلة من المتتابعات كل منها متتابعة صحيحة تركيبياً مادامت تطبيقاً لقاعدة اشتقاق صحيحة.المهم أن ترتيب الخطوات تحكمه استراتيجيه برهان

معينة تشبه استراتيجية لاعب الشطرنج فى تصميم موت شاه الخصم (١).

وفى حالتنا هنا فالتشبيه أكثر من مجرد تشبيه شكلى فلاعب الشطرنج لايحاول البحث عن الخطوة الأولى فى لعبة الشطرنج التى توصله إلى الوضع الفائز أو إلى حل وضع صعب انه ينطلق من الوضع الحالى، وهو يماثل المقدمات الفعلية التى تحتوى عليها المتتابعة، وتحكمه مجموعة من قواعد تحريك القطع فى لعبة الشطرنج ، مثلما تحكم المنطقى مجموعة القواعد الخاصة بحذف أو تقديم الثوابت . وأخيراً لابد أن يمتلك لاعب الشطرنج خطة محددة وهذا مايماثل استراتيجية البرهان عند المنطقى ، والتى تؤدى به إلى الوضع الفائز أو إلى المتتابعة المطلوبة .

أما خطتنا فى عرض نظرية البرهان فستكون تدريجية إلى حد كبير سنتناول كل ثابت على حدة، ونعرض لقاعدتى حذف وتقديم هذا الثابت بالشرح والتحليل، متبعين ذلك بأمثلة متدرجة فى الصعوبة لبيان كيفية تطبيق القواعد المعينة . وكلما تقدمنا فى العرض ، وكلما زاد عدد القواعد تعرضنا لامثلة أكثر تنوعاً وصعوبة من المتتابعات الصحيحة اشتقاقياً .

وتجدر الإشارة إلى أن هناك بعض القواعد التى لاغنى للنسق عنها، وأخرى تكمليلية ، أما تلك التى لاغنى عنها فاثنتان الأولى هى قاعدة الافتراض الحر، والتى لاقيام لنسق الاستنباط الطبيعى بدونها أما الثانية فشرط لجعل النسق كلاسيكياً،وهى قاعدة النفى المزدوج، وبدونها يصبح النسق حدسياً Intuitionist تبقى القواعد التكميلية ، وهذه لا تتعلق بثابت معين وإنما الهدف منها تسهيل إجراءات البرهان واختصار خطواته

(1) Suppes, p.(1957),p.20.

بصورة كبيرة . ومن هذه قواعد الاستبدلال وتقديم المتتابعات أو المبرهنات، وهذا ما سنراه بالتفصيل فى-الفصول المتبقية من هذه الدراسة وبالتوازى مع هذا العرض لأزواج القواعد سنعرض باختصار لاهم الخطط البرهانية التى نحاول من خلالها تطبيق عدد معين من القواعد .

وبترتيب معين بغية الوصول إلى المطلوب البرهنة عليه وسنجد أن هناك خطة عامة أو استراتيجية يتم تقسيم البرهان بناء عليها إلى مراحل معينة بما يقرب العمليات الإستدلالية المنطقية من التفكير الإنسانى العقلانى المنظم وهو ما يجعل منطقنا طبيعياً إلى حد كبير .

الفصل الأول
الإفتراض والتضمن

الفصل الأول
الإفتراض والتضمن

ا - قاعدة الإفتراض الحر

الصفحات التالية مخصصة أساساً لعرض قاعدتى التقديم والحذف الخاصتين بثابت التضمن، وهما القاعدتان اللتان تحددان الشروط التى متى توافرت أصبح من حقنا أت نقدم ثابت التضمن، أو أن نحذفه، بحسب الأحوال. وسنتبع هذا العرض التحليلى بأمثلة توضيحية متعددة ومتدرجة ولكن بداية النسق يجب أن تكون بالحديث عن قاعدة أخرى تلعب دوراً محورياً فى نظرية الاشتقاق، بل إنهاالقاعدة الأساسية الى يقوم عليها نسق الاستنباط الطبيعى بكامله، وهى تسمى قاعدة الافتراضات Rule of Assumptions (١)، ونفضل نحن تسميتها بقاعدة الافتراض الحر Free Assumption، وهذا لتأكيد سمة هامة ستتضح بعد قليل.

تقضى قاعدة الإفتراض الحر بأن من حق القائم بعملية البرهان أو الإشتقاق أن يفترض أى قضية سواء تمثلها صيغة بسيطة، أو مركبة، وذلك فى أى خطوة من خطوات البرهان، وهذا الحق مطلق لصاحب البرهان لاقيد عليه أبداً، ومن هنا تأتى التسمية بالإفتراض الحر. وحين نفترض قضية، فإننا نركب متتابعة معينة مقدمتها صيغة ولتكن 'A'، ونتيجتها نفس الصيغة 'A'. وإليك بعض الأمثلة.

(a)	(1)	$P \vdash P$	Ass
(b)	(2)	$Q \vee R \vdash Q \vee R$	Ass
(c)	(3)	$P \rightarrow (S \vee R) \vdash P \rightarrow (S \vee R)$	Ass

(1)Lemmon, E.J, (1965), P.9.

المتابعات (a) ، و (b) ، و (c) عبارة أمثلة لتطبيق قاعدة الافتراض الحر. المثال الأول يقول إنه فى السطر رقم(١) من سلسلة برهان معين نفترض" P"، وبموجب هذا نضع المتتابعة " P |-P". فى نهاية السطر نضع الحروف "Ass" كاختصار يدل على أن الخطوة محض افتراض Assumption. أما المثال (b) فيقول إننا فى السطر الخامس من سطور برهان معين افترضنا 'Q vR' بما يعني صحة المتتابعة:

"Q v R ⊢ Q v R"

ووضعنا اسم القاعدة فى نهاية السطر. كذلك الحال بالنسبة للمثال (c). والصورة العامة لقاعدة الإفتراض هى :

A ⊢ A

تقول القاعدة إن أى متتابعة عبارة عن مقدمة واحدة ونتيجة، هما نفس الصيغة، هى متتابعة صحيحة. وهذا أمر يكاد أن يكون فى غير حاجة إلى توضيح أو تبرير. ومع ذلك عن الجلى أننا بدأنا من مقدمة على أساس التسليم بها نستنتجها من نفسها، وهذا أمر بديهى لا نلتزم باعتبار'A' صادقة إلا على شرط قبول صدقها، وهنا يأتى التبرير الدلالى للقاعدة التى تمثل صورة عامة يستحيل أن تكون غير صحيحة دلالياً، أى أن الصيغة :

$$A \models A$$

صحيحة دلالياً. ذلك أن لدينا متغير واحد هو "A" ، وفى حالة صدقه أو كذبه تكون المتتابعة صحيحة دائماً.

والآن نسأل : متى نلجأ إلى تطبيق هذه القاعدة ؟ الإجابة أن من حقنا

استخدام هذه القاعدة فى أى مرحلة من مراحل البرهان. وهذا يحدث عادة فى حالتين. الأولى هى الحالة التى نفترض فيها مقدمات المتتابعة المطلوب البرهنة على صحتها، ونفعل ذلك بحيث نفترض كل مقدمة فى سطر مستقل برقم مستقل، ونضع فى اعتبارنا أن آخر سطر من سطور البرهان هو متتابعة مقدماتها هى مجموعة الإفتراضات هذه، لا أكثر (ولاأقل).

أما الحالة الثانية فهى تلك التى نقدم فيها افتراضاً لا يرد أصلاً كإحدى مقدمات المتتابعة الأصلية المطلوب البرهان على صحتها. والإفتراض فى هذه الحالة افتراض زائد Additional assumption، ووصف هذا الإفتراض بأنه زائد يشير الى أنه سيوظف بطريقة خاصة حسبما تقضى قواعد الاشتقاق التى سندرسها، وبحيث يختفى فى مرحلة معينة قبل السطر الأخير، وبحيث لا يظهر أبداً كإحدى مقدمات المتتابعة النهائية.(١).

ولعل هذا مما يدفعنا إلى الحيطة حين نستخدم قاعدة الافتراض الحر. ويجب ألا تعد هذه الحيطة تقييداً على صحة تطبيق قاعدة الافتراض الحر، أو على حقنا فى استخدامها، بل هى ضمان لصحة خطوات البرهان عموماً، بحيث إذا استخدمنا افتراضاً زائداً فى إحدى مراحل البرهان، يجب أن نعرف من البداية الكيفية التى سنتخلص بها من هذا الافتراض الزائد. وسنجد خلال عرضنا فى الصفحات التالية أن هناك قواعد معينة ينبغى لتطبيقها تقديم افتراضات زائدة، وأخرى يتعين لتطبيقها رفع افتراضات

---

(١) يذهب بعض الباحثين إلى وجوب التمييز بين الحالتين اللتين نطبق فيهما هذه القاعدة، وطبقاً لهذا الرأى تعبر الحالة الأولى عن مجرد وضع المقدمات أما الافتراضات الزائدة فهى ما يطبقون عليه هذا الاسم. يذهب إلى هذا نيوتن سميث(١٩٨٥) وسمبسون (١٩٨٨)، ونرى أن هذا تعقيد لا ضرورة له.

معينة سبق وضعها خصيصاً لهذا الغرض.

٣- حذف التضمن :

والآن ننتقل إلى بحث قاعدتى ثابت التضمن. القاعدة الأولى ستكون حذف التضمن Implicatin ELimination، وسيكون رمزها "E →" ، ونبدأ بها لسهولتها النسبية عن قاعدة التقديم، والمقصود بالقاعدة أن نحدد الشروط التى نحتاج إلى وجودها لكى نحذف ثابت التضمن من صيغة نتيجة متتابعة معينة. الصورة العامة للقاعدة هى :

$$\frac{X \vdash A \to B \quad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \to E$$

ما فوق الخط يمثل الشرطين المطلوب توافرهما، وما تحت الخط يمثل الإجراء المنطقى الذى يتيحه لنا هذان الشرطان. لاحظ أولاً أن الرمزين "X"، و "Y" ، وفى حالات أخرى تنضم اليهما "Z" يدلون معاً على مجموعات من الصيغ التى تمثل مقدمات متتابعة معينة. تتراوح أفراد هذه المجموعات بين "صفر"، وأى عدد متناه من المقدمات. أما الرموز 'A'، و'B'، و'C' ، فتشير إلى صيغ سواء بسيطة أو مركبة.

يتمثل شرطاً تطبيق قاعدة حذف التضمن فى وجود متتابعة مجموعة مقدماتها هى 'X' ونتيجة المتتابعة عبارة عن صيغة ثابتها الرئيسى هو التضمن، وهو الثابت الذى سنقوم بحذفه. لكى نتمكن من هذا نحتاج إلى

الشرط الثانى، وهو يتمثل فى وجود متتابعة مجموعة مقدماتها هى "Y" التى قد نختلف كلية عن المجموعة "X" ، وقد تتداخل معها، وقد تتطابق معها. المهم أن نتيجة هذه المتتابعة تطابق مقدم الصيغة التضمنية التى تمثل نتيجة المتتابعة الأولى.

الإجراء الذى يخول الشرطان السابقان لنا القيام به، وهو ما يظهر فى الصيغة العامة أسفل الخط، عبارة عن متتابعة يمكن تركيبها، مقدماتها هى مجموع مقدمات المتتابعتين الأوليين، ونتيجتها هى تالى نتيجة المتتابعة الأولى. وبذا يختفى ثابت التضمن لأن شروط حذفه توافرت. الشروط هى وجود استدلال على الصيغة التضمنية فضلاً عن وجود استدلال آخر على مقدم الصيغة وحده، مما يجعل من حقنا الاستدلال على تالى التضمن من مجموع مقدمات الاستدلالين الأولين.(١).

والقاعدة ببساطة تقابل المبدأ الدلالى الذى قدمناه فى الباب الثانى من هذه الدراسة. يقول المبدأ إنه فى حالة صدق صيغة تضمنية، فإن صدق مقدم هذه الصيغة يوجب صدق التالى. وهذا واضح من تعريف ثابت التضمن. ويمكن اعتبار هذا المبدأ الدلالى مصدراً لتبرير مشروعية قاعدة حذف التضمن. والآن نأخذ مثالاً واحداً لبيان كيفية تطبيق القاعدتين السابقتين.

مثال ١ : برهن على صحة المتتابعة التالية :

---

(١) تذكرنا هذه القاعدة، ولاشك بإحدى مصادرات النسق المنطقى الرواقى القديم. وتعرف هذه القاعدة منذ العصور الوسطى قاعدة إثبات التالى Modus Ponendo Ponens. راجع الفصل الثانى من : أحمد أنور (١٩٨٣)

$$P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash R$$

المتتابعة ذات ثلاث مقدمات، ونتيجتها هى الصيغة البسيطة "R" فقط. وأى اختبار صpق يثبت أن المقدمات غير متسقة مع نفى النتيجة، أى أن المتتابعة صحيحة دلالياً. من الممكن إذن البرهنة عليها كما عرفنا فى بداية هذا الباب. سنضع أولاً خطوات البرهان، ثم نقوم بشرحه بشىء من التفصيل.

البرهان .

(1)	$P \vdash P$	Ass
(2)	$P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$	Ass
(3)	$Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$	Ass
(4)	$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	(1), (2), $\rightarrow$ E
(5)	$P, P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash R$	(3), (4), $\rightarrow$ E

إن عملية البرهان هى سلسلة الخطوات التى انتهت بالخطوة الخامسة، التى نلاحظ معاً أنها تطابق المتتابعة المطلوب البرهنة عليها، وهذا، إذا كانت كل الخطوات المؤدية إليه سليمة، وطبقاً لما تبيحه لنا القواعد، يعتبر برهاناً سليماً على صحة المتتابعة. ولكى نقيم الخطوات السابقة نفضل البداية من السطر الأول لنرى سلسلة الخطوات بشكل أفضل.

السطور الثلاثة الأولى عبارة عن تطبيق لقاعدة الافتراض الحر ثلاث مرات متواليات، وهذا لأن لدينا ثلاث مقدمات، فتقوم بافتراض كل منها على حدة فى سطر مستقل. لدينا فى السطر الأول متتابعة نتيجتها "P"، وهى نفس مقدم نتيجة المتتابعة الموجودة فى السطر الثانى، وهذا يعنى أن

المتتابعتين الموجودتين فى السطرين (١)، و (٢) تقدمان معاً الشرطين الضروريين والكافيين لتطبيق قاعدة حذف التضمن، وهذا ماحدث فى السطر الرابع، حيث نضع مجموع مقدمات المتتابعتين و (1) ، (2) على يسار ثابت اللزوم، ثم نضع على يمين الثابت تالى نتيجة المتتابعة الثانية.

بعد اتمام تكوين السطر الرابع أصبح لدينا متتابعتان : الأولى هى السطر رقم (3) ، ونتيجتها صيغة تضمنية، والمتتابعة الثانية الموجودة فى السطر رقم (4) ونتيجتها هى مقدم التضمن فى المتتابعة رقم (3). وهذان هما شرطا تطبيق قاعدة حذف التضمن (للمرة الثانية)، مما يعنى أن مجموع المقدمات يلزم عنه تالى القضية التضمنية أى "R" ، وهذا هو المطلوب البرهنة عليه. لاحظ أننا فى أقصى يمين السطر إسم القاعدة التى نطبقها ومعها السطور التى يتم تطبيق ذلك عليها.

ويمكن إعادة كتابة البرهان السابق بشىء من الاختصار عن طريق الاستغناء عن تكرار كتابة المقدمات كل مرة، وكتابة رقم يطابق رقم الخطوة التى ترد فيها المقدمة أول مرة، أى عند افتراضها. وبهذا يمكن إعادة كتابة البرهان السابق بالأسلوب الرمزى المختصر :

1	(1)	P	Ass.
2	(2)	$P \rightarrow Q$	Ass.
3	(3)	$Q \rightarrow R$	Ass.
1,2	(4)	Q	(1), (2), $\rightarrow$ E
1,2,3	(5)	R	(3), (4), $\rightarrow$ E

لا حظ أيضاً اختفاء ثابت اللزوم. وما حدث هو أننا نقلنا رقم السطر الى المكان الذى نضع فيه ثابت اللزوم، وبهذا فإن الارقام التى تسبق رقم

السطر هى مقدمات المتتابعة، والرموز التى تليه هى صيغ النتائج، والرموز فى أقصى اليمين تمثل رمز الإجراء المنطقى مسبوقا بأرقام السطور الى بدأنا منها.

٣- تقديم التضمن :

الآن ننتقل الى قاعدة تقديم التضمن Implication Introduction، وهى الآن القاعدة التى يتحدد من خلالها الشرط أو الشروط التى نستطيع بموجبها إنشاء علاقة تضمنية لم تكن موجودة من قبل، ونرمز لهذه القاعدة بالرمز "Æ I". الصورة العامة لها هى :

$$\frac{X \vdash B}{X \backslash A \vdash A \rightarrow B} \rightarrow I$$

تقضى القاعدة بأنه إذا توافرت مجموعة من المقدمات، وهى "X" بحيث يلزم عنها الصيغة "B" ، فإن نفس مجموعة المقدمات "X" مطروحاً منها إحداها، وهى فى حالتنا الصيغة "A" ، يلزم عنها القضية التضمنية التى مقدمها الصيغة "A" ، وتاليها الصيغة "B" .

ويلاحظ على هذه القاعدة أن المقدمة أو الافتراض الذى يخصم أو يرفع من مجموعة المقدمات "X" فى المتتابعة الأولى لا يختفى كلية بل يظهر كأحد طرفى علاقة التضمن اللازمة عن المجموعة "X\A" ، والصيغة "A" يجب أن تكون مقدم التضمن، وليس تاليه(١) ؛ ذلك أن التالى يظل دائماً هو

---

(١) ننبه هنا إلى وجوب مقارنة هذه القاعدة بقاعدة تقديم الفصل من هذه الزاوية، ومن زاوية أخرى أيضاً. غير أنه يجب الانتظار حتى نتناول القاعدة الأخرى لكى تكون المقارنة واضحة.

نتيجة المتتابعة الأصلية.

نأتى إلى تبرير هذه القاعدة. لدينا متتابعة مجموعة مقدماتها هى "X" ونتيجتها هى "B" ، أى أن "B" تلزم عن المجموعة "X" . تقول القاعدة إن بإمكاننا أخذ أحد أفراد المجموعة "X" ، وليكن "A" لنقول إن الباقى يلزم عنه أن "A" تتضمن "B" . من ناحية الصدق نجد أن تطبيق القاعدة صحيح تماماً. إذا كانت كل صيغ المجموعة "X" صادقة، كانت "B" أيضاً صادقة بحكم لزومها عن المجموعة، ومن ثم إذا أخذنا أحدها سيكون التضمن الملزوم صادقاً أيضاً. وإذا فرضنا أن "B" كاذبة فإن واحدة من صيغ المجموعة "X" على الأقل ستكون كاذبة مما يعنى أنه سواء كانت "A" صادقة أو كاذبة ستكون المتتابعة الناتجة صحيحة أيضاً (١).

وقبل أن ننتقل إلى تناول بعض الأمثلة التوضيحية. تؤكد على تكامل قاعدتى التضمن، إحداهما حذف والأخرى تقديم (٢). وغالباً ما تتكامل القاعدتان مع قاعدة الافتراض الحر فى خطة برهانية واحدة. يحدث هذا

(١) إذا كانت "A" صادقة كان التضمن "A → B" كاذباً، ولكن يبقى أن إحدى قضايا المجموعة "X \A" ستكون كاذبة مما يحفظ للمتتابعة صحتها. أما إذا كانت "A" كاذبة فإن التضمن "A→B" سيكون صادقاً، ويستوى فى هذه الحالة صدق كل أفراد المجموعة "X" أو كذب أحدها على الأقل.

(٢) نجد هذه القاعدة، وهى قاعدة تقديم التضمن، باسم مختلف هو البرهان الشرطى Conditional proof عند سوبيز ولمون. راجع فى هذا الصدد:

Suppes (1957), pp. 28 - 30.

Lemmon (1956), pp. 14 - 15.

ويتميز عرض لمون بأنه يبذل جهداً واضحاً فى تقريب مضمون القاعدة للأذهان بما يؤسس مشروعيتها. أما سوبيز فيستعرض خصائص هذه القاعدة. فضلاً عن أنه يردها إلى ألفرد تارسكى الذى برهن على صحتها عام ١٩٢٩. وتجدر الإشارة إلى أننا نجد قاعدة قريبة الشبه =

غالباً حين تكون نتيجة المتتابعة المطلوب البرهان عليها قضية تضمنية وما نفعله فى هذا الصدد أن نفترض مقدم التضمن كافتراض زائد لكى نصل إلى إثبات تالى هذا التضمن بواسطة الافتراض بالتعاون مع افتراضات أخرى (بتطبيق حذف التضمن فى أحيان كثيرة). بعد ذلك نطبق قاعدة تقديم التضمن لنصل فى النهاية إلى المتتابعة المطلوبة. المثال التالى نموذجى لتوضيح هذه الخطة البرهانية التى تتكرر كثيراً.

مثال (٣):

برهن على صحة المتتابعة التالية:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$$

البرهان:

1	(1)	$P \rightarrow Q$	Ass.
2	(2)	$Q \rightarrow R$	Ass.
3	(3)	P	Ass.
1,3	(4)	Q	(1), (3), $\rightarrow$ E
1,2,3	(5)	R	(2), (4), $\rightarrow$ E
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	(3), (5), $\rightarrow$ I

= إلى حد كبير من قاعدتنا هذه لدى المناطقة الرواقيين. راجع تفصيل هذه القاعدة المسماة بقاعدة التشريط Conditionalisation فى الفصل الثانى من دراستنا للماجستير (١٩٨٣).

ومن وجهة نظر أخرى نجد أن تشيرش ينسب القاعدة الى جاسكوفسكى بنفس القدر الذى تنسب به الى جنزن. ويلاحظ فى هذا الصدد أن تبنيهما لها كقاعدة أولية فى النسق ينطوى على درجة من المبالغة من وجهة نظر صعوبة اعتبارها كذلك. غير أن تشيرش لا ينكر المكسب الكبير الذى يتحقق من اعتبارها قاعدة أولية فى أى نسق منطقى. ونحن حين نقبل المبرهنة المذكورة كقاعدة أولية، فنحن بذلك نعترف بالإجراء غير الصورى العادى الذى نثبت به تضمناً عن طريق افتراض مقدمه ومحاولة اثبات تاليه. راجع:

Church, A. (1956), pp. 164 - 165.

فى السطرين الأول والثانى افترضنا مقدمتى المتتابعة المطلوب البرهان عليها بعد ذلك نلاحظ أن النتيجة المطلوب اشتقاقها من هذين الافتراضين عبارة عن قضية تضمنية. الخطة البرهانية كما ذكرنا هى أن نفترض مقدم التضمن، وهذا ما حدث فى السطر الثالث باعتبار هذا الافتراض زائداً، والخطة تقضى بالعمل على اشتقاق من الافتراضين الأولين بالتعاون مع الافتراض الزائد، ثم تطبيق تقديم التضمن. لكى نصل الى المطلوب، وفى نفس الوقت نرفع الافتراض الزائد.

لتطبيق هذه الخطة نجد أن لدينا فى السطر الأول متتابعة نتيجتها تضمن، وفى السطر الثالث متتابعة نتيجتها مقدم هذا التضمن، فننتقل بموجب قاعدة حذف التضمن الى اشتقاق تالى التضمن من مجموع المقدمات فى المتتابعتين (1) ، و (3). فى السطر الخامس نكرر نفس العملية لنصل إلى متتابعة مقدماتها الأفتراضات (1) ، و (2) ، و (3) ، ونتيجتها هى الصيغة "R" فقط.

هنا نستطيع أن نكمل دائرة خطتنا البرهانية الموضوعة فى البداية باختيار المقدمة رقم (3) من بين مقدمات المتتابعة الموجودة فى السطر الخامس، ورفعها من المجموعة، واشتقاق تضمنها للنتيجة من بقية صيغ المجموعة، وهى (1) ، (2) . وهذا بالضبط ما حدث فى السطر السادس والأخير من البرهان.

لاحظ أننا نشير فى أقصى يمين السطر الى أننا طبقنا قاعدة تقديم التضمن على أساس السطرين الثالث الموجود به الافتراض المرفوع والخامس الذى تشكل نتيجته تالى التضمن الذى سيتم تقديمه. وهذا هو

المطلوب إثباته.(١)

مثال (٣):

برهن على ما يلى:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

البرهان:

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	Ass.
2	(2)	$P \rightarrow Q$	Ass.
3	(3)	P	Ass.
1,3	(4)	$Q \rightarrow R$	(1), (3), $\rightarrow$ E
2,3	(5)	Q	(2), (3), $\rightarrow$ E
1,2,3	(6)	R	(4), (5), $\rightarrow$ E
1,2	(7)	$P \rightarrow R$	(3), (6), $\rightarrow$ I
1	(8)	$(p \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	(2), (7), $\rightarrow$ I

نتوقف قليلاً عند هذا البرهان. المتتابعة المطلوب البرهان عليها لها مقدمة واحدة نفترضها فى السطر الأول. نلاحظ أن المطلوب اشتقاقها من هذه المقدمة عبارة عن صيغة تضمنية، ولهذا نلجأ إلى افتراض المقدم فى السطر الثانى على أساس اشتقاق الصيغة "$P \rightarrow R$" من الافتراضين. ولأن الصيغة الأخيرة تضمنية أيضاً نقوم بافتراض مقدمها (أى "P") بحيث يكون من الأسهل إشتقاق "R" من الافتراضات الثلاثة ثم تطبيق قاعدة تقديم التضمن مرتين متتاليتين.

---

(١) التشابه الشديد بين المثالين الأول والثانى لا يلغى أنهما برهانان مختلفان لمتتابعتين مختلفتين تماماً.

السطور من الرابع إلى السادس عبارة عن سلسلة تطبيقات لقاعدة حذف التضمن بهدف الوصول إلى متتابعة نتيجتها هى "R" وحدها، ومقدماتها هى الافتراضات الثلاثة التى قدمناها فى بداية البرهان. وهذا بالضبط ما نصل إليه فى السطر السادس.

فى السطر السابع تكتمل دائرة الافتراض الزائد الذى قدمناه فى السطر الثالث، ويتم رفعه عن طريق تطبيق قاعدة تقديم التضمن. تتكرر نفس العملية فى السطر الثامن والأخير لنصل بتقديم التضمن إلى رفع الافتراض الزائد الموجود فى السطر الثانى والوصول إلى تركيب نتيجة المتتابعة واشتقاقها من الافتراض الأول فقط، وهذا يطابق المطلوب إثباته.

ولنتوقف الآن قليلاً عند أحد سطور البرهان السابق، وبالتحديد السطر السادس الذى نجد فيه المتتابعة الصحيحة التالية:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) , (P \rightarrow Q) , P \vdash R$$

إن ما قمنا به فى السطرين التاليين هو تكرار تطبيق قاعدة تقديم التضمن بأخذ المقدمة الثالثة أولاً، ثم المقدمة الثانية لتبقى المقدمة الأولى فقط وليلزم عنها الصيغة التى تم تركيبها على الناحية الأخرى من ثابت اللزوم. هذا الترتيب مرتبط بهدفنا، وهو الوصول إلى المتتابعة المطلوب البرهان على صحتها. إلا أن فى إمكاننا أن نقدم التضمن بترتيب مختلف لنصل إلى البرهان على متتابعات أخرى صحيحة أيضاً، ولكنها مختلفة عن متتابعتنا. كان بإمكاننا الوصول إلى صحة أى من المتتابعات التالية:

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash P \rightarrow \{(P \rightarrow Q) \rightarrow R\}$$
$$P \rightarrow Q \vdash \{P \rightarrow (Q \rightarrow R)\} \rightarrow (P \rightarrow R)$$
$$P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow [\{P \rightarrow (Q \rightarrow R)\} \rightarrow R]$$

$$P \vdash \{P \rightarrow (Q \rightarrow R)\} \rightarrow \{(P \rightarrow Q) \rightarrow R\}$$
$$\vdash \{P \rightarrow (Q \rightarrow R)\} \rightarrow [P \rightarrow \{(P \rightarrow Q) \rightarrow R\}]$$

هذه المجموعة وغيرها من المتتابعات (والمبرهنات) نستطيع بتطبيق قاعدة تقديم التضمن أن نصل إليهادون أدنى قيد على ترتيب المقدمات التى نرفعها ونحولها إلى مقدم لتضمن تاليه نتيجة المتتابعة الأولى. وإذا تأملنا المبرهنة الأخيرة فى هذه المجموعة نجد أنها تدلنا على أن قاعدة تقديم التضمن تساعدنا فى تحويل أى متتابعة إلى مبرهنة دون أدنى تغيير فى صحة النسق. كل مانفعله هو أن نأخذ مقدمات المتتابعة مرة بعد أخرى ونكون بها تضمنات معينة تواليها هى نتائج المتتابعة فى كل حالة حتى تنتهى كل المقدمات، ومهما كان عدد هذه المقدمات.

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة صورياً على النحو التالى:

إذا كان لدينا المتتابعة:

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \vdash B$$

فبإمكاننا عن طريق سلسلة من التطبيقات لقاعدة تقديم التضمن أن نحولها إلى المبرهنة:

$$\vdash A_1 \rightarrow [A_2 \rightarrow \{ \ldots\ldots (A_n \rightarrow B)\}]$$

أو غيرها من المبرهنات التى تختلف فى توزيع أماكن المقدمات داخل صيغة المبرهنة فى كل حالة.

٤- أمثلة إضافية:

نتناول فى هذا القسم مجموعة من الأمثلة التى تنطوى على بعض التعقيد والتحوير الذى يكتنف تطبيق القواعد التى درسناها حتى الآن. غير

أن هذا لا يخل أبداً ببساطة نسق حساب المتتابعات بقدر ما يؤكد قوته الاستدلالية.

مثال (٤):

برهن على المتتابعة التالية:

$$P \rightarrow \{\sim Q \rightarrow (R \rightarrow S)\} \vdash R \rightarrow \{P \rightarrow (\sim Q \rightarrow S)\}$$

البرهان:

1	(1)	$P \rightarrow \{\sim Q \rightarrow (R \rightarrow S)\}$	Ass.
2	(2)	R	Ass.
3	(3)	P	Ass.
4	(4)	$\sim Q$	Ass.
1,3	(5)	$\sim Q \rightarrow (R \rightarrow S)$	(2), (3), $\rightarrow$ E
1,3,4	(6)	$R \rightarrow S$	(4), (5), $\rightarrow$ E
1,2,3,4	(7)	S	(2), (6), $\rightarrow$ E
1,2,3	(8)	$\sim Q \rightarrow S$	(4), (7), $\rightarrow$ I
1,2	(9)	$P \rightarrow (\sim Q \rightarrow S)$	(3), (8), $\rightarrow$ I
1	(10)	$R \rightarrow \{P \rightarrow (\sim Q \rightarrow S)\}$	(2), (9), $\rightarrow$ I

إن كثرة عدد خطوات هذا البرهان النسبية تخفى بساطة وتناغماً رائعين. فبعد الخطوة الأولى التى نفترض فيها مقدمة المتتابعة الأصلية ينقسم البرهان إلى ثلاث مراحل كل منها يتكون من ثلاث خطوات متكررة. المرحلة الأولى مرحلة افتراض، الثانية تطبيق لقاعدة حذف التضمن ثلاث مرات. أما المرحلة الثالثة فتطبيق لقاعدة تقديم التضمن ثلاث مرات أيضاً.

وتتفاعل المراحل الثلاث بشكل متناسق. الخطوة الثانية مرتبطة بالخطوة السابعة والخطوة العاشرة. نفس الارتباط نجده بين الخطوات

الثالثة والخامسة والتاسعة، وكذا بين الخطوة الرابعة والسادسة والثامنة. وهذا التفاعل لا يغيب عنه الافتراض الأول منذ بداية السطر الخامس وحتى السطر الأخير. وكل هذه التفاعلات تتم وفق الخطة البرهانية التى تبدأ بافتراض زائد هو مقدم لشرط فى النتيجة ثم الوصول إلى التالى بتطبيق قاعدة معينة (حذف التضمن فى حالتنا هذه)، بعد ذلك نرفع الافتراض الزائد ونشتق النتيجة المطلوبة من المقدمات. تكررت هذه الخطة البرهانية بصورة متداخلة ثلاث مرات.

مثال (٥):

برهن باستخدام قواعد الاستنباط الطبيعى على صحة المتتابعة التالية:

$$P \vdash Q \rightarrow P$$

البرهان:

1	(1)	P	Ass.
2	(2)	Q	Ass.
1	(3)	$Q \rightarrow P$	Ass.

هذا البرهان يختلف عن البرهان السابق فى ناحيتين على الأقل الأول طويل نسبياً وبسيط من ناحية أن خطواته تطبيقات مباشرة للقواعد، أما هذا البرهان فأقل فى عدد الخطوات كثيراً وإن إحتوى على التعقيد الذى يحتاج الى وقفة لتدقيق فهمنا لقاعدة تقديم التضمن بالذات.

فى السطر الأول افترضنا مقدمة المتتابعة بالصورة العادية. فى السطر الثانى وجدنا أن من اللازم افتراض "Q" لأن النتيجة صيغة

تضمنية، وفى السطر الثالث، وهنا المفاجأة الحقيقية، نجد أن بإمكاننا تقديم التضمن تطبيقاً للقاعدة مباشرة، ودون أن تكون الصيغة "Q" إحدى مقدمات المجموعة "X" التى تضم مقدمات "P" . هذا معناه أن "X\A" التى نتحدث عنها فى الصيغة العامة للقاعدة تساوى "X" الأصلية، لأن "A" (التى هى "Q" فى حالتنا هذه) ليست ضمن أفراد "X" كما قدمنا.

ونتصور أن شيئاً من التدريب يجعلنا قادرين على استيعاب هذا التعقيد البسيط للقاعدة، وهو فى حقيقة الأمر لا يمثل قيداً على القاعدة أو تطبيقها بل إنه يحرر القاعدة أكثر. وهذا يأتى من حقيقة أن القاعدة تتيح لنا الانتقال من صحة متتابعة معينة إلى صحة متتابعة أخرى نتيجتها عبارة عن قضية تضمنية تاليها هو نتيجة المتتابعة الأصلية ومقدمها أى قضية أخرى يحلو لها اختيارها. الشرط الوحيد أنه إذا كان المقدم هو إحدى مقدمات المتتابعة الأصلية يمكن رفعه من مجموعة المقدمات. أما إذا لم يكن، ظل تطبيق القاعدة سليماً أيضاً، مع بقاء مجموعة المقدمات كما هى.

وبهذا الفهم الجديد تكون المتتابعات التالية جميعاً صحيحة، ونصل إلى اشتقاقها بنفس الخطوات الثلاث السابقة:

$$P \vdash \sim Q \rightarrow P$$
$$P \vdash R \rightarrow P$$
$$P \vdash (Q \,\&\, S) \rightarrow P$$
$$P \vdash \sim P \rightarrow P$$
$$P \vdash (Q \,\&\, \sim Q) \rightarrow P$$

وتبدو هذه النتيجة غريبة الشئ، ولكن أبعادها تتضح إذا علمنا أن معنى هذه المتتابعات السابقة كلها، بالعودة إلى الأساس الدلالى، لايخرج

عن أنه بفرض صدق أى صيغة ("P" فى حالتنا هذه) فإن أى صيغة أخرى تتضمنها. القضية الصادقة تتضمنها أى قضية أخرى، فالتضمن يصدق فى حالة صدق التالى وبغض النظر عن المقدم. (١)

مثال (٦):

استخدم الشجرة الدلالية فى بيان أى المتتابعتين التاليتين صحيح، وأيهما غير صحيح. بين حالة عكسية واحدة للمتتابعة غير الصحيحة، وبرهن على صحة الأخرى:

(a) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

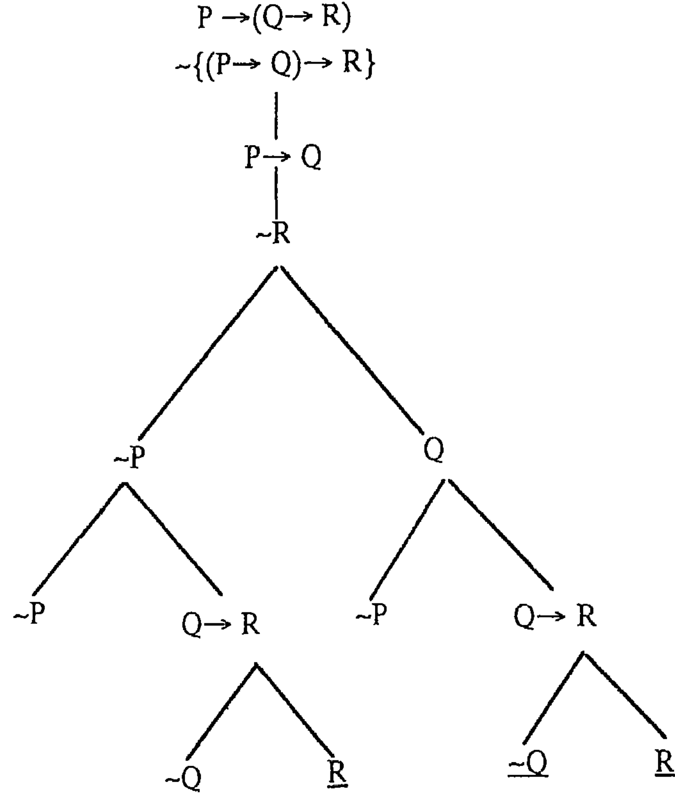
(b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

الإجابة:

نبدأ بتطبيق أسلوب الأشجار الدلالية على المتتابعتين لتحديد المتتابعة الصحيحة. ولكى يتم ذلك نضع أولاً النموذج العكسى لكل متتابعة ثم نطبق قواعد التفريع.

(أ) المتتابعة الأولى:

(١) شعر فريق من المناطقة بعدم الإرتياح لهذه النتيجة فضلاً عن توأمها التى سندرسها حين نتعرض لقواعد النفى. وسميت هاتان النتيجتان بمفارقات التضمن المادى. وقد قدمت محاولات متعددة لإصلاح المنطق الكلاسيكى الذى يعترف بهما غير أننا نؤجل البحث فى هذه القضية الآن لحين التعرض للمفارقة الأخرى فى الفصل الثالث من هذا الباب، والتى تقول أن القضية الكاذبة تتضمن أى قضية أخرى.

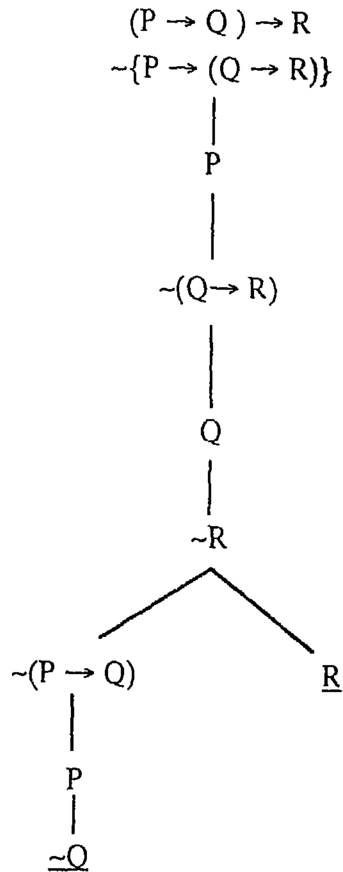


بدأنا هنا بتحديد طبيعة الحالة العكسية المطلوب تحقيقها وهى تكون بصدق المقدمة وكذب التالى، ثم قمنا بسلسلة تفريعات للشجرة الدلالية، حسب قواعد التفريع التى درسناها فى الباب الثانى من هذه الدراسة.بعد اكتمال التفريع وجدنا أن من الممكن تكوين الحالة العكسية بأكثر من طريقة.يهمنا نموذج عكسى واحد وهو :

كذب كل من 'P' , 'R' وصدق. 'Q'

(ب) المتتابعة الثانية:

النموذج العكسى للمتتابعة هو:



ينطوى فرعا الشجرة الدلالية على تناقض، ومن ثم لا يمكن تكوين نموذج عكسى لهذه المتتابعة، إذن فهى صحيحة. ومهمتنا هى البحث عن برهان على ذلك.

البرهان:

1	(1)	$(P \to Q) \to R$	Ass.
2	(2)	P	Ass.
3	(3)	Q	Ass.
3	(4)	$P \to Q$	(2), (3), $\to$ I
1,3	(5)	R	(1), (4), $\to$ E
1	(6)	$Q \to R$	(3), (5), $\to$ I
1	(7)	$P \to (Q \to R)$	(2), (6), $\to$ I

بعد الأمثلة السابقة، لابد أن نكون أقدر على الإئتلاف مع البرهان الحالى الذى يعتمد على قواعدنا الثلاث السابقة فقط. بالنسبة لقاعدة حذف التضمن فى السطر الخامس كان المقدم نفسه صيغة تضمنية، وهو أمر لا يمثل أى استثناء لقاعدتنا، فقد قلنا أن "A" قد تكون أى صيغة. لاحظ الفرق بين تطبيق قاعدة تقديم التضمن فى السطر السادس، وكل من السطر الرابع والسابع. فى الحالة الأولى الافتراض المرفوع كان ضمن أفراد مجموعة مقدمات المتتابعة الأصلية، وفى الحالة الثانية، أى فى السطرين الرابع والسابع لم يكن الإفتراض المرفوع ضمن أفراد "X" وهذا أمر رأينا أن النسق يسمح به تماماً.

مثال (٧):

برهن على صحة المتتابعة التالية:

$$P \to Q \vdash \{(R \to Q) \to S\} \to \{(R \to P) \to S\}$$

البرهان:

1	(1)	$P \rightarrow Q$	Ass.
2	(2)	$(R \rightarrow Q) \rightarrow S$	Ass.
3	(3)	$R \rightarrow P$	Ass.
4	(4)	R	Ass.
3,4	(5)	P	(3),(4),→E
1,3,4	(6)	Q	(1),(5),→E
1,3	(7)	$R \rightarrow Q$	(4),(6),→I
1,2,3	(8)	S	(2),(7),→E
1,2	(9)	$(R \rightarrow P) \rightarrow S$	(3),(8),→I
1	(10)	$\{(R \rightarrow Q) \rightarrow S\} \rightarrow \{(R \rightarrow P) \rightarrow S\}$	(2),(9),→I

إن هذا البرهان خير شاهد على المدى الذى يمكن أن تصل إليه النظرية المنطقية من تطور وتعقيد، بالرغم من أننا نعتمد على ثلاث قواعد فقط. ولنتأمل معاً الكيفية التى سار بها البرهان.

الخطوات الثلاث الأولى مباشرة، والهدف هو الوصول إلى سطر نستنبط فيه "S" فقط من الافتراضات الثلاثة التى قدمناها. وهذا ما تم انجازه فى السطر الثامن لنطبق قاعدة تقديم التضمن مرتين بعد ذلك فنصل الى المتتابعة المطلوبة بالضبط.

وتبقى الحيلة البرهانية التى انتقلنا فيها من السطر الثالث الى الثامن. قدمنا افتراضاً زائداً فى السطر الرابع هو "R" لنصل منه الى "P" ثم "Q" من (1) ، (3) ، (4) . والخطوة الحاسمة هى السابعة التى نحقق فيها أكثر من هدف. الأول هو تكوين مقدم التضمن الموجود فى السطر الثانى، أى "R →Q" . والهدف الثانى هو التخلص من الافتراض الزائد

(4) بتطبيق قاعدة تقديم التضمن وتحويل "R" الى مقدم لتضمن تاليه "Q" . الهدف الأخير يتحقق فى السطر الثامن بتطبيق قاعدة حذف التضمن واستخراج "S" من (1) ، (2) ، (3) كما كان فى تخطيطنا منذ البداية.

ننهى هذا الفصل بكلمة أخيرة حول القواعد الثلاث التى قدمناها فيه. لقد كان لدينا أكثر من سبب لكى نبدأ عرض نظرية البرهان بتناول التضمن بالتحديد. السبب الأول أن هذا الثابت لعب دوراً كبيراً فى تطور النظرية المنطقية تاريخياً. والسبب الثانى يتمثل فى العلاقة الوطيدة بين هذا الثابت وبين مفهوم الاستنباط أو اللزوم سواء الدلالى أو الإشتقاقى، بل أن قاعدتى التضمن تنظم هذه العلاقة بالتحديد (١).

غير أن هناك سبباً إضافياً يتمثل فى ظهور ما يعرف بالمنطق الجزئى Partial Logic ، وهو النسق المنطقى الذى يختص بجزء فقط من الاستدلالات الصحيحة. ومن هنا تكفى القواعد الثلاث التى قدمناها لتأسيس منطق جزئى للتضمن فقط. ونذكر فى هذا الصدد النسق الذى قدمه توماسون وهو يعتمد على قواعد مناظرة لقواعد الفصل الحالى (٢).

---

(١) كان هذا واحداً من أسباب اهتمامنا فى رسالة الماجستير بدراسة هذا الموضوع بتفصيل كبير. وقد كانت المسألة الرئيسية فى هذا البحث هى العلاقة بين التضمن والاستنباط.

(2) Thomason, R. (1970), pp. 14 - 27.

الفصل الثاني
الوصل والفصل

الفصل الثانى

الوصل والفصل

نهتم فى هذا الفصل بالبحث فى القواعد الخاصة بثابتى الوصل والفصل، وهما من زاوية الدلالة مختلفان إلى حد كبير. ثابت الوصل يتطلب شروط صدق أصعب بكثير مما يتطلبه ثابت الفصل . فلكى يصدق ثابت الوصل يجب أن يصدق طرفاه، أما صدق الفصل فيكفى لتحقيقه صدق أحد الطرفين على الأقل. أما فى حالة الكذب فالصورة معكوسة. الوصل يكذب إذا كذب أحد طرفيه على الأقل ، أما لكى يكذب ثابت الفصل فلابد أن يكون طرفاه كاذبان. وسنرى أن هذا سينعكس على قواعد التقديم والحذف الخاصة بهذين الثابتين، وسنرى أيضاًأن تقديم الوصل يحتاج إلى شروط أصعب من شروط تقديم الفصل، وكذلك أن شروط حذف الفصل أصعب كثيراً من شروط حذف الوصل

ا - حذف الوصل

نبدأ بقاعدة حذف الوصل Conjunction Elimination باعتبارها قاعدة سهلة الشروط، بمعنى أن تطبيقها لايحتاج إلى شروط إضافية فيما عدا تلك المؤدية إلى المركب الوصلى نفسه. ماذا تقول القاعدة؟ تقول بأنه إذا كانت لدينا متتابعة نتيجتها عبارة عن صيغة وصلية، فإن بإمكاننا إقرار صحة متتابعة أخرى مقدماتها هى نفس مقدمات المتتابعة الأولى ونتيجتها هى أحد طرفى علاقة الوصل الأصلية دون الاستعانة بأية افتراضات إضافية. ولعل هذا هو مايجعل للقاعدة

صورتين اثنتين، فى الأولى نستنتج طرفاً من أطراف الوصل، وفى الثانية نستنتج الثانى بحسب حاجتنا لتحقيق الهدف النهائى من خطوات البرهان. والآن نتأمل الصورة العامة لهذه القاعدة، وهى :

$$\frac{X \vdash A\&B}{X \vdash B} \; \&E \qquad\qquad \frac{X \vdash A\&B}{X \vdash A} \; \&E$$

تقضى القاعدة بأنه إذا كان لدينا برهان على صيغة وصلية، فإن نفس مقدمات المتتابعة، دون زيادة أو نقصان، تؤدى إلى أحد طرفى الوصل . لايهم أى طرف، فقد يكون الأول وقد يكون الثانى، وهذا سبب وجود صورتين للقاعدة كما أسلفنا القول .

ولعل القاعدة فى غير حاجة إلى تبرير نظراً لوضوحها وبداهتها . ولكن إذا عدنا إلى معايير الحس المشترك نجد أنه إذا اتفقنا على أن اليوم حار، وأن الأمس كان معتدلاً، فمن المستحيل تصور اختلاف بيننا حول أن الأمس كان معتدلاً كقضية واحدة، أو الاختلاف حول أن اليوم حار بناء على المقدمة الوصلية التى بدأنا منها.

وإذا حاولنا تأسيس القاعدة من زاوية نظرية الدلالة نجد أن صدق الوصل لايتأتى إلا بصدق طرفيه معاً، ومن ثم إذ بدأنا من مقدمة تقول بصدق الوصل فيلزم أن نقبل بصدق كل طرف على حدة . ذلك أنه لولم يصدق كل منهما على حدة لما صدق الوصل . والآن نأخذ مثالاً مبسطاً للدلالة على تطبيق هذه القاعدة .

مثال ١ :

برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$P\&R, R \rightarrow Q \vdash Q$$

البرهان

1	(1)	(P & R)	Ass
2	(2)	R → Q	Ass
1	(3)	R	(1), &E
1,2	(4)	Q	(2), (3), →E

السطر الأول والثانى خطوتان مباشرتان نفترض فيهما مقدمتى المتتابعة المطلوبة، ونلاحظ أن المطلوب الوصل إليه هو الصيغة "Q" ، وهى تالى التضمن فى السطر الثانى. أما مقدم التضمن فيمثل أحد طرفى الوصل فى المقدمة الأولى مما يجعلنا نطبق قاعدة حذف الوصل على السطر الأول لنصل إلى "R" وحدها. والخطوة التالية تكون تطبيقاً صحيحاً لقاعدة حذف التضمن من السطرين الثانى والثالث لنصل من المقدمتين إلى النتيجة. السطر الرابع يطابق المتتابعة المطلوب البرهان عليها

مثال ٢ :

برهن على صحة المتتابعة :

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P\&Q) \rightarrow R$$

البرهان

1	(1)	P →(Q →R)	Ass
2	(2)	(P & Q)	Ass
2	(3)	P	(2), &E
1,2	(4)	(Q →R)	(1), (3), →E
2	(5)	Q	(2) &E
1,2	(6)	R	(4), (5), →E
1	(7)	(P & Q) →R	(2), (1), →I

بعد افتراض المقدمة فى السطر الأول نجد أن السطر الثانى عبارة عن افتراض زائد بسبب كون النتيجة المطلوب اشتقاقها عبارة عن صيغة تضمنية. الهدف إذن هو الوصول إلى " R " من المقدمتين. المقدمة الأولى عبارة عن تضمنين متداخلين, والمقدمة الثانية وصل يؤدى حذفه إلى تسهيل تطبيق قاعدة حذف التضمن مرتين متتاليتين مما يجعلنا نصل إلى " R " فى السطر السادس من البرهان. وبعد ذلك نقوم بتقديم التضمن لكى نصل إلى المتتابعة المطلوب البرهان عليها .

لاحظ أن خطتنا البرهانية العامة هى تقديم افتراض زائد ثم تطبيق قاعدة تقديم التضمن فى السطر الأخير . أما التكتيكات الجزئية فقد اعتمدت على تطبيق قاعدة حذف الوصل مرتين، وكذا قاعدة حذف التضمن ، وهذا يعنى أن القاعدتين الأخيرتين تمثلان فى الغالب الأعم تكتيكات فرعية فى كثير من البراهين كما سنرى

٣-تقديم الوصل : Conjunction Introduction

قاعدة تقديم الوصل هى المقابل لحذف الوصل، وتختلف فى أنها تحتاج إلى مجموعتين من الشروط . المجموعة الأولى هى المقدمات التى تؤدى إلى صيغة معينة . المجموعة الثانية هى المقدمات التى تؤدى إلى صيغة أخرى تقول قاعدة تقديم الوصل إن بإمكاننا إنشاء علاقة وصل بين الصيغتين عن طريق جمع مقدمات كل منهما . والصورة العامة لهذه القاعدة على النحو التالى :

$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash B}{X,Y \vdash A\&B} \quad \&1$$

معنى القاعدة أنه إذا كان لدينا دليل أو برهان على صدق "A"، وهى ترمز إلى أى صيغة . ومن ناحية أخرى إذا توافر دليل أو برهان على صدق صيغة أخرى هى " B" فبإمكاننا اشتقاق صدق وصل "A " ، و"B " من مجموع مقدمات المتتابعتين . لاحظ أن مجموع المقدمات ليس وصلاً ، وإنما مجموع لمقدمات منفصلة، أى أنها صيغ منفصلة لايربطها ثابت منطقى من الثوابت التى عرفناها فى حساب القضايا .

والدليل على ذلك أنه فى بعض الأحيان تتطابق المجموعة " X " مع المجموعة "Y " ولذلك يكون مجموعهما هو نفس المجموعة ولا نقول " Y,Y" أو "X,X " وهذا ماسنراه فى براهين معينة تالية ، أما الوصل بين "A " و"A " فلابد وأن نلتزم بكتابته "A&A "، وكذلك الوصل بين "B " ، و"B " نكتبه "B&B ". ننتقل الآن إلى تناول بعض الأمثلة التوضيحية:

مثال ٣ : برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$Q \rightarrow R \vdash (P\&Q) \rightarrow (P\&R)$$

البرهان:

1	(1)	$Q \rightarrow R$	Ass
2	(2)	$P \& Q$	Ass
1	(3)	Q	(2), &E
1,2	(4)	R	(1), (3), →E
2	(5)	P	(2), &E
1,2	(6)	$P \& E$	(4), (5), →&I
1	(7)	$(P \& Q) \rightarrow (P \& R)$	(2),(6),→E

فى السطر الأول من البرهان افتراضنا المقدمة كإجراء روتينى. ونظراًإلى أن النتيجة عبارة عن صيغة ثابتها الرئيسى هو التضمن. فالخطة البرهانية العامة يجب أن تكون بتقديم افتراض زائد (فى السطر الثانى)، على أن يتم رفع هذا الافتراض (فى الخطوة الأخيرة) بعد أن نصل إلى التالى فى متتابعة مقدمتاها هما الافتراضان الأول والثانى .

المطلوب إذن أن نصل إلى "P&R " من المقدمتين "R → Q "، "P&Q" وبما أن المطلوب عبارة عن قضية وصلية فالخطة الفرعية ستكون تقديم الوصل ، وتقضى هذه الخطة بأن نصل إلى "P " وحدها، وإلى "R " وحدها ثم نجمعهما بتقديم الوصل على ألا تزيد المقدمات عن المقدمتين المشار إليهما نحصل على "P " بحذف الوصل من المقدمة الثانية، وقد تم هذا فى السطر الخامس . أما "R " فتحتاج إلى خطوتين لاشتقاقها. الأولى تتمثل فى تطبيق قاعدة حذف الوصل لكى نحصل على "Q " فى السطر الثالث، وبعد ذلك نطبق قاعدة حذف التضمن على المقدمة الأولى باستخدام " Q" لنصل إلى "R ". وهنا نقوم بتقديم الوصل فى السطر السادس، مما يعنى اكتمال تنفيذ الخطة البرهانية الفرعية ، ثم تقديم التضمن فى السطر الأخير من البرهان ، لكى نصل إلى المطلوب اثباته .

مثال ٤ : برهن على صحة المتتابعة

$$(P\&R) \vdash (R\&P)$$

البرهان :

1	(1)	P & R	Ass
1	(2)	R	(1), &E
1	(3)	P	(1), &E
1	(4)	R & P	(2), (3), →I

البرهان بسيط جداً، ولايحتاج إلى شرح، وهو عبارة عن تطبيق متقابل لقاعدتى حذف وتقديم الوصل . والهدف من تقديم هذا المثال التأكيد على سمة هامة من سمات ثابت الوصل والتى تجعله مختلفاً عن التضمن،وهى أن طرفاه على قدم المساواة من حيث مكانهما . ولايضير المركب أى الطرفين يأتى أولاً،أما التضمن فهناك الطرف الأول الذى نسميه المقدم والطرف الثانى الذى نسميه التالى، ومن ثم تكون المتتابعة التالية غير صحيحة :

$$P \rightarrow R \vdash R \rightarrow P$$

وسنرى بعد حين أن ثابتى الفصل والتكافؤ يشبهان الوصل فى أن ترتيب طرف الثابت لايؤثر على شروط صدق العلاقة، ولاعلى إمكانية اشتقاقهامن مقدمات معينة، ولكن لأن هذه الحقيقة مما يكن البرهان عليه دلالياً واشتقاقياً فنحن لا نفترضه بل نبرهن عليه . نحن لانفترض فى المنطق مايمكن أن نبرهن عليه حتى وإن بدا بديهياً إلى أقصى الحدود .

مثال ٥ :

$$(P \& Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

البرهان

1	(1)	$(P \& Q) \rightarrow R$	Ass.
2	(2)	P	Ass.
3	(3)	Q	Ass.
2,3	(4)	$P \& Q$	(2), (3), & I
1,2,3	(5)	R	(1), (4), →I
1,2	(6)	$Q \rightarrow R$	(3), (5), →I
1	(7)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	(2), (6),→I

قبل شرح خطوات البرهان نلاحظ أن المتتابعة مرتبطة بمتتابعة المثال رقم (٢) فى نفس هذا الفصل . ووجه الارتباط أن مقدمة الأولى هى نتيجة الثانية ونتيجة الأولى هى مقدمة الثانية . ولهذا نقول إن بين القضيتين علاقة تلازم أو اشتقاق متبادل [١] . والآن ننتقل لشرح خطوات البرهان .

بعد افتراض المقدمة الوحيدة فى السطر الأول نفترض مقدم النتيجة لأنها قضية تضمنية . بعد ذلك نفترض مقدم تالى النتيجة؛[٢] وهو الصيغة "Q"؛ وهذا يختصر هدفنا إلى إثبات"R " من الافتراضات الثلاثة ، وهذا ينطوى على تطبيق لقاعدة تقديم الوصل فى السطر الرابع بين نتيجتى السطرين الثانى والثالث ، ثم حذف التضمن فى السطر الخامس على السطرين الأول والرابع، لنصل إلى المتتابعة المطلوبة فى السطر السابع بتقديم التضمن مرتين متتاليتين؛ وهذا ينطوى على رفع الافتراضين

---

(١) نتعرض لهذه العلاقة بشئ من التفصيل فى الفصل الخاص بالتكافؤ .

(٢) ليس هناك خطأ فى هذا التعبير، فتالى النتيجة عبارة عن تضمن هو "Q→ R" فنفترض مقدمه ، أى نفترض مقدم تالى النتيجة.

الزائدين في نفس الوقت.

٣ - تقديم الفصل

في تناولنا لقاعدتي ثابت الوصل بدأنا بعرض قاعدة حذف الوصل باعتبارها القاعدة الأسهل نسبياً، وسنطبق المبدأ نفسه في تناول قاعدتي الفصل ، ولذا نبدأ بعرض قاعدة تقديم الفصل Disjunction Introduction، وهي القاعدة التي تحدد لنا الشروط التي نستطيع أن ننطلق منها لتقديم صيغة فصلية معينة .

تقول القاعدة إنه إذا كان لدينا متتابعة معينة، نستطيع من نفس مجموعة المقدمات دون زيادة أو نقصان أن ننتقل إلى نتيجة عبارة عن فصلية أحد طرفيها هو نتيجة المتتابعة الأصلية، ودون اعتبار للترتيب الذي يكون عليه الطرفان . الصورة العامة للقاعدة تشبه قاعدة حذف الوصل في أنها تتخذ نموذجين هما .

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \ \vee I \qquad \frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \ \vee I$$

السبب في وجود نموذجين للقاعدة أن عملية تقديم الفصل لا تخضع لاعتبار تركيب القضيتين المنفصلتين. نستطيع انطلاقاً من متتابعة معينة أن ننشئ علاقة فصل طرفها الأيمن أو الأيسر نتيجة المتتابعة الأصلية . وما يوجهنا في الاختيار لا يخرج عن اعتبارات خاصة بالهدف النهائي من البرهان، كما سنرى في أمثله متنوعة لاحقة .

ونظن أن القاعدة ليست بحاجة إلى تبرير على الإطلاق، ولكن شيئاً

من التوضيح مطلوب هنا. إذا فهمنا المتتابعة الأولى بأنها توفر الشروط الضرورية والكافية لإقرار صدق "A " (أو " B " فى النموذج الثانى) فما تقوله القاعدة أن نفس الشروط ضرورية وكافية لإنشاء صدق مركب فصلى أحد طرفيه هو "A " فى حالة الأولى ، (و "B " فى الحالة الثانية) والسبب فى هذا أنه يكفى فى الواقع لصدق أى مركب فصلى أن يصدق أحد طرفيه فقط، وهذا ماتقوله المتتابعة الأولى(فوق الخط) مما يعنى أننا مخولون بإنشاء هذه القاعدة بموجب تعريف الفصل كدالة صدق .

وتجدر الإشارة إلى أنه من الممكن إعادة تطبيق هذه القاعدة أكثر من مرة بحيث نستطيع، إذا بدأنا من متتابعة بسيطة أن نصل عن طريق سلسلة من التطبيقات لقاعدة تقديم الفصل، أن نكون متتابعة نتيجتها غاية فى التعقيد والتركيب من نفس المقدمة، (أو المقدمات) الأصلية. وتتشابه هذه القاعدة مع تقديم التضمن فى هذا الجانب بالتحديد . راجع فى هذا الصدد المثال رقم (٧)

مثال ٦ : برهن على صحة المتتابعة :

R & Q |- R v Q

البرهان:

1	(1)	R & Q	Ass
1	(2)	Q	(1), &E
1	(3)	R v Q	(2), v I

برهان آخر :

1	(1)	R & Q	Ass
1	(2)	R	(1), &E
1	(3)	R v Q	(2), v I

تقول المتتابعة إن قيام علاقة وصل بين طرفين يلزم عنه قيام علاقة فصل بينهما، ومن ناحية الصدق نجد أن شروط صدق الوصل أقوى من الفصل، إذ يلزم لصدقه أن يصدق الطرفان، ولهذا يستحيل صدق المقدمة وكذب النتيجة . أما اللزوم العكسى ، أى من صدق الفصل إلى صدق الوصل فغير صحيح منطقياً لنفس السبب المذكور .

فإذا عدنا إلى البرهان على صورتيه نجد أنه مباشر وليس بحاجة إلى تعليق أما وجود برهانين فإنعكاس لإمكانية تطبيق نموذجى الصورة العامة لقاعدة تقديم الفصل التى أشرنا إليها تواً ، فضلاً عن إمكانية تطبيق نموذجى الصورة العامة لقاعدة حذف الوصل التى درسناها سابقاً.

مثال ٧ : برهن على مايلى

P |- Q → [Rv {(P&Q) vS}]

البرهان

1	(1)	P	Ass
2	(2)	Q	Ass
1,2	(3)	(P & Q)	(1), (2), &I
1,2	(4)	(P & Q) v S	(3), v I
1,2	(5)	Rv{(P & Q) v S}	(4), v I
1	(6)	Q →[R v {(P & Q) v S}]	(2),(5),→I

فى السطر الأول افتراضنا المقدمة الوحيدة ، وهى القضية " P ". النتيجة المطلوبة عبارة عن قضية تضمنيه [١] مما يعنى أن الخطة البرهانية يجب أن تكون بإفتراض المقدم ثم الوصول إلى التالى من الافتراض الجديد بالتعاون مع الافتراض الأصلى. ونختم بتطبيق قاعدة تقديم التضمن.

ولكى يتم تنفيذ هذه الخطة البرهانية العامة يجب أن نكون قادرين على اشتقاق الصيغة "{R v {(P & Q) v S " ، ومن المقدمتين " P" و "Q " الصيغة المطلوب اشتقاقها فصلية،وهذا يملى علينا ضرورة اشتقاق أحد طرفى الفصل فقط ، مما ييسر لنا أن نشتق المركب بتقديم الفصل. هل نأخذ "R " كهدف ؟ أم نأخذ طرف الفصل الثانى، وهو " (P & Q) v S" ؟ الملاحظ أن "R " لاعلاقة لها بالمقدمتين . نأخذ إذن الصيغة المركبة، فنلاحظ أنها عبارة عن مركب فصلى هى الأخرى. أحد طرفى هذا المركب الفصلى هو الصيغة "(P&Q)" وهى ذات علاقة وثيقة بالمقدمتين .

ومن هنا تأتى فكرة الخطوة الثالثة وهى تطبيق قاعدة تقديم الوصل بالجمع بين "P "، و "Q " ثم يأتى بعد ذلك تطبيق قاعدة تقديم الفصل مرتين متتاليين فى سطرين هما الرابع والخامس، فيتكون المركب المطلوب. بعد ذلك نطبق قاعدة تقديم التضمن فى السطر السادس والأخير . ولعل فى هذا المثال مايوضح ماقصدناه حين كنا نتحدث عن قاعدتى تقديم

---

(١) وصف القضية أو الصيغة بالتضمنية يعنى أن ثابتها الرئيسى هو التضمن ووصفها بالفصلية يعنى أن الثابت الرئيسى هو الفصل ، وهكذا

والتضمن، وكيف أنهما تمكناننا من اشتقاق صيغ مركبة من مقدمات بسيطة .

٤ - حذف الفصل

نأتى الآن إلى أصعب قواعد النسق الاستنباطى قاطبة، ألا وهى قاعدة حذف الفصل Disjunction Elimination، وهذا القاعدة هى التى تخول لنا الانتقال من متتابعة إلى أخرى، بحيث تكون نتيجة الأولى قضية فصلية . ومع صعوبة هذه القاعدة سنرى أن هذا الانتقال طبيعى تماماً،وليس بعيداً عن الأسلوب الذى نمارس به استدلالاتنا بشكل عادى فى حياتنا العامة، كما أوضح جنزن فى دراسته الرائدة التى نعتمد عليها هنا .

تقول القاعدة إنه إذا كان لدينا متتابعة ننتقل فيها من مقدمات معينة إلى نتيجة فصلية، ومن جهة ثانية كان لدينا متتابعة مقدماتها تحتوى بينها أحد طرفى النتيجة الفصلية ولها نتيجة معينة، وكان لدينا من جهة ثالثة متتابعة مقدماتها تحتوى بينها الطرف الثانى من الفصل فى المتتابعة الأولى ونتيجتها مطابقة لنتيجة المتتابعة الثانية، نستطيع بناء على القبول بالمتتابعات الثلاث السابقة أن نصل إلى صحة متتابعة مقدماتها هى نفس مقدمات المتتابعة الأولى مضافاً إليها مقدمات المتتابعة الثانية منقوصاً منها المقدمة المطابقة لطرف الفصل الأول ، فضلاً عن مجموعة مقدمات المتتابعة الثالثة منقوصاً منها المقدمة المطابقة لطرف الفصل الثانى؛ أما النتيجة التى تحتويها تلك المتتابعة فهى تتطابق مع نتيجة المتتابعتين الأخيرتين .

الصورة العامة لهذه القاعدة تبدو على النحو التالى

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash C \quad Z \vdash C}{X, Y \setminus A, Z \setminus B \vdash C} \; \vee E$$

الذى يحدث فى أغلب الأحوال أن يكون لدينا متتابعة نتيجتها قضية فصلية ونريد أن ننتقل بحذف الفصل إلى نتيجة أخرى. مانفعله فى هذه الحالة هو أن نفترض (افتراضاً زائداً) طرف الفصل الأول، ونستخدمه فى الوصول إلى النتيجة المرجوة بمساعدة افتراضات أخرى. من ناحية ثانية نفترض (افتراضاً زائداً) الطرف الثانى من أطراف الفصل، ونستخدمه فى الوصول إلى نفس النتيجة، ربما بمساعدة افتراضات أخرى. المحصلة النهائية تكون بالانتقال إلى النتيجة مباشرة بحذف الفصل أى بالاستغناء عن المركب الفصلى بالكامل، ومقدمات المتتابعة النهائية هى مقدمات الفصل بالاضافة إلى الافتراضات المساعدة فى الوصول إلى النتيجة النهائية مع الافتراضين الزائدين المذكورين .

معنى هذا أننا نرفع هذين الإفتراضين الزائدين فلا يظهرا ضمن مقدمات المتتابعة النهائية. وهكذا نجد أن تطبيق قاعدة حذف الفصل يحتاج عادة إلى خمسة أسطر. الأول هو السطر الذى يحتوى على النتيجة الفصلية، والسطر الثانى هو السطر الذى نفترض فيه الطرف الأول، والسطر الثالث هو الذى نصل فيه إلى النتيجة الجديدة من الافتراض الأول. أما السطر الرابع ففيه نفترض الطرف الثانى للفصل، وفى السطر

الخامس نصل إلى النتيجة الجديدة نفسها من هذا الطرف . حينما نجد هذه السطور الخمسة نستطيع تطبيق قاعدة حذف الفصل ، ورفع الافتراضين الزائدين دفعة واحدة .

لابد من التسليم بالصعوبة النسبية التى تكتنف تطبيق هذه القاعدة، ، وهذا يعود أساساً لضعف المركب الفصلى بالمعنى الذى شرحناه أكثر من مرة غير أن هذه الصعوبة تتبدد كثيراً حين نتأمل الأمر قليلاً. تصور طالباً يريد أن يحصل على كتاب هام، فيذهب إلى المكتبة للحصول عليه . على هذا الطالب أن يضع فى اعتباره أن الكتاب قد يكون موجوداًبالمكتبة، فيستطيع الحصول عليه عن طريق الاستعارة. وعليه أيضاً أن يضع فى اعتباره الاحتمال الثانى (الطرف الثانى من العلاقة الفصلية)، وهو أن أحد زملائه قد استعار نفس الكتاب، ولذلك عليه أن يفكر فى وسيلة أخرى للحصول على النسخة، إما بالشراء أو الإقتراض من زميل آخر، وبهذا يضمن الوصول لهدفه فى كل الاحوال . تأمل المثال التالى

مثال ٨ : برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$P \vee R, P \rightarrow Q, R \rightarrow Q \vdash Q$$

البرهان:

1	(1)	$P \vee R$	Ass
2	(2)	$P \rightarrow Q$	Ass
3	(3)	$R \rightarrow Q$	Ass
4	(4)	P	Ass
2,4	(5)	Q	(2), (4), →E
6	(6)	R	Ass
3,6	(7)	Q	(3), (6), →E
1,2,3	(8)	Q	(1),(4),(5),(6),(7), vE

المتــتــابعــة المطلوبة تمثل إحــدى صــور برهان (أو قــيــاس) الاحراج Dilemma المعروف منذ السوفسطائيين، وتقول المتتابعة إنه إذا كان لدينا اختيار بين بديلين (الصيغة الفصلية)، وأدى الطرف الأول إلى نتيجة معينة (التضمن الأول)، وأدى الطرف الثانى إلى النتيجة نفسها (التضمن الثانى) ، فنحن ملزمون بقبول هذه النتيجة إحراجاً !). ولعل هذا البرهان يوضح بشكل عام الكيفية التى يفكر بها الطالب فى الحالة التى أشرنا إليها تواً.

أما البرهان فعبارة عن صياغة رمزية لما قدمناه فى السطور السابقة. فى السطر الأول من البــرهان افتــر ضنا المقــدمــة الأولى، وفى الثــانى افتراضنا الثانية، وفى الثالث الثالثة. ولما رأينا أن خطوات البرهان تعتمد بالضرورة على المقدمة الأولى؛ انتهينا إلى أن الخطة العامة للبرهان تقوم على تطبيق قاعدة حذف الفصل والذى تم فى السطر الأخيـر من هذا البرهان .

ولكى نقوم بذلك افترضنا فى السطر الرابع الطرف الأول من علاقة الفصل ("P ")، ووصلنا من هذا الافتراض بالتعاون مع الافتراض الثانى إلى النتيجة (" Q"). فى السطر السادس افترضنا الطرف الثانى من علاقة الفصل، ووصلنا منه بالعاون مع الافتراض الثالث إلى النتيجة نفسها ('Q)

وهنا نصل إلى أنه سواء قبلنا طرف الفصل الأول أو طرفه الثانى ننتهى إلى نفس النتيجة، ومن ثم تؤدى القضية الفصلية إلى النتيجة بتطبيق قاعدة حذف الفصل .

وإذا تأملنا السطر الأخير الذى نطبق فيه هذه القاعدة نلاحظ أن مقدمات المتتابعة هى "1 " و " 2" و "3 " فقط، وقد تم رفع الافتراضين "4"، و "6"، وهذا ماتقضى به القاعدة. لاحظ أيضاً أننا عند الاشارة فى أقصى يمين الصفحة إلى القاعدة المطبقة أثبتنا خمسة سطور. السطر الأول هو السطر الذى يضم القضية الفصلية، والسطر الثانى نفترض فيه الطرف الأول من الفصل، والسطر الثالث هو الذى نصل فيه إلى النتيجة من هذا الإفتراض. السطر الرابع يضم الإفتراض الثانى، وهو الطرف الثانى من علاقة الفصل، أما السطر الخامس والأخير فيحتوى على نفس النتيجة مشتقة من الافتراض الزائد الثانى .

مثال ٩ : برهن على صحة المتتابعة التالية .

P v Q |- Q v P

البرهان :

1	(1)	P v Q	Ass
2	(2)	P	Ass
2	(3)	Q v P	(2), v I
4	(4)	Q	Ass
4	(5)	Q v P	(4), vI
1	(6)	Q v P	(1),(2), (3),(4),(5), vE

هذا المثال نموذج مبسط لتطبيق قاعدة حذف الفصل، وعدد سطوره يمثل الحد الأدنى للسطور المستخدمة فى تطبيق القاعدة. ولسنا بحاجة إلى تقديم شرح خاص بهذا البرهان، والتعليق الوحيد أنه يثبت ماسبق أن

أشرنا إليه من أن ترتيب أطراف الفصل يشبه الترتيب فى أطراف الوصل فى أنه لايؤثر على شروط صدق العلاقة نفسها، وهذا بخلاف التضمن الذى تختلف قيمة صدقه وقوته الاستدلالية بإختلاف مكان طرفيه .

مثال ١٠: برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$P \& (Q \vee R) \vdash (P \& Q) \vee (P \& R)$$

البرهان:

1	(1)	P & (Q V R)	Ass
1	(2)	P	(1), &E
1	(3)	Q v R	(1), &E
4	(4)	Q	Ass
1.4	(5)	P & Q	(2), (4), &I
1.4	(6)	(P & Q) v (P & R)	(5), v I
7	(7)	R	Ass
1,7	(8)	P & R	(2), (7), &I
1,7	(9)	(P & Q) v (P & R)	(8), vI
1	(10)	(P & Q) v (P & R)	(3),(4), (6),(7),(9),vE

فى المثال الحالى نلاحظ أن المتتابعة تتناول ما يمكن أن نسميه قانون توزيع الوصل على الفصل وهى تقضى بأن ثابت الوصل إذا قام بين طرف ("P ") وبين مركب فصلى يمكن توزيع علاقة الوصل على طرفى الفصل بحيث يكون الثابت الرئيسى فصلاً، وهناك قانون أخر لتوزيع الفصل على الوصل مكمل لقانوننا هذا .

والبرهان يبدأ من حقيقة أن المتتابعة لها مقدمة واحدة، ونتيجة واحدة نضع المقدمة كافتراض فى السطر الأول . ننظر إلى النتيجة المطلوب

الوصول إليها من هذه المقدمة وحدها نلاحظ أنها فصلية، وفى هذه الحالة يمكن اشتقاق أحد طرفيها فقط ثم الوصول إلى المركب عن طريق تقديم الفصل .

والمقدمة بشكلها الحالى لاتساعد مباشرة فى الوصول إلى النتيجة، ولأنها صيغة وصلية يمكن لنا تطبيق قاعدة حذف الوصل مباشرة لنرى إمكانية استخدام طرفيها معاً كمقدمتين منفصلتين، وهذا ماحدث فى السطرين الثانى والثالث. فالسطر الثالث يحتوى على صيغة فصلية مما يعنى ضرورة تطبيق قاعدة حذف الفصل، من هنا يأتى السطر الرابع الذى نفترض فيه الطرف الأول لنصل إلى النتيجة على خطوتين (هما السطر الخامس والسادس)، وتكرر نفس الأمر مع الطرف الثانى للفصل الذى نفترضه فى السابع لنصل إلى النتيجة نفسها فى السطر التاسع .

والآن اكتملت العناصر الضرورية لتطبيق قاعدة حذف الفصل بتطبيقها على السطور الخمسة، وهى الثالث والرابع والسادس والسابع والتاسع لنصل إلى النتيجة من المقدمة الأولى فقط بعد رفع الافتراضين اللذين يحتلان السطرين الرابع والسابع كما قدمنا، السطر الأخير يطابق المتتابعة المطلوب البرهان عليها

مثال ١١ : برهن على صحة المتتابعة التالية:

$$P \vee P \vdash S \rightarrow P$$

البرهان:

1	(1)	$P \vee P$	Ass.
2	(2)	S	Ass.
3	(3)	P	Ass.
1	(4)	P	1,3,3,3,3,vE
1	(5)	$S \rightarrow P$	(2), (4), →I

نفترض المقدمة فى الخطوة الأولى . بما أن النتيجة قضية تضمنية نفترض مقدمها وهو "S " ، ونحاول الوصل إلى "P " من المقدمتين معاً. ولأن البرهان يحتاج إلى استخدام المركب الفصلى " PvP" فسنطبق قاعدة حذف الفصل، وهنا نكون أمام حالة خاصة جداً. منشأ هذه الحالة أن طرفى الفصل متطابقان لأنه لاوجود لقاعدة تنقلنا من الفصل " PvP" إلى "P " فقط، فإننا نبدأ بافتراض الطرف الأول (الذى هو أيضاً الطرف الثانى) وهو القضية "P " فى السطر الثالث .

السطر الرابع تصل فيه إلى " P " مشتقة من الافتراض الأول فقط بقاعدة حذف الفصل . ولنرى معاً كيف تم هذا ، لتطبيق قاعدة حذف الفصل نحتاج إلى خمسة سطور . السطر الأول هو الذى يحتوى على الفصل (السطر الأول). السطر الثانى هو السطر الذى نفترض فيه الطرف الأول، وهذا يتمثل فى السطر الثالث من البرهان . السطر الثالث المطلوب هو السطر الذى نصل فيه إلى النتيجة من الافتراض الزائد، وهذا هو السطر الثالث أيضاً، لأن "P " هى مانريد الوصول إليه . السطر الرابع المطلوب هو السطر الذى نفترض فيه الطرف الثانى من العلاقة الفصلية، وهو " P " أيضاً ، ولهذا يقوم السطر الثالث فى البرهان بهذا الدور أيضاً، أما السطر الخامس الذى نصل فيه إلى النتيجة فهو الفصل السطر الثالث نفسه مرة أخيرة ، وبهذا نكون قد استخدامنا السطر الثالث أربع مرات فى البرهان . أما السطر الخامس من سطور هذا البرهان الطريف فهو تقديم للتضمن بين السطر الثانى والرابع لنصل إلى المطلوب إثباته .

وبالإشارة إلى استخدام السطر الثالث أكثر من مرة، فهذا لايعنى أننا تجاهلنا أياً من الشروط المطلوبة لتطبيق قاعدة حذف الفصل . وكان بإمكاننا كتابة البرهان بزيادة ثلاثة سطور ، ولكن دون إضافة حقيقية لتوضيح البرهان، لأننا فى هذه الحالة سنقوم بكتابة نفس المتتابعة أربع مرات متتالية، والأوفق أن نستغل الرخصة التى يمنحنا إياها النسق، وهى أننا نستطيع إستخدام نفس السطر أكثر من مرة فى سطور جديدة حتى وإن كان على النحو الإستثنائى الذى تم فى الخطوة الرابعة من البرهان الذى قمنا بتحليله الآن

مثال ١٢

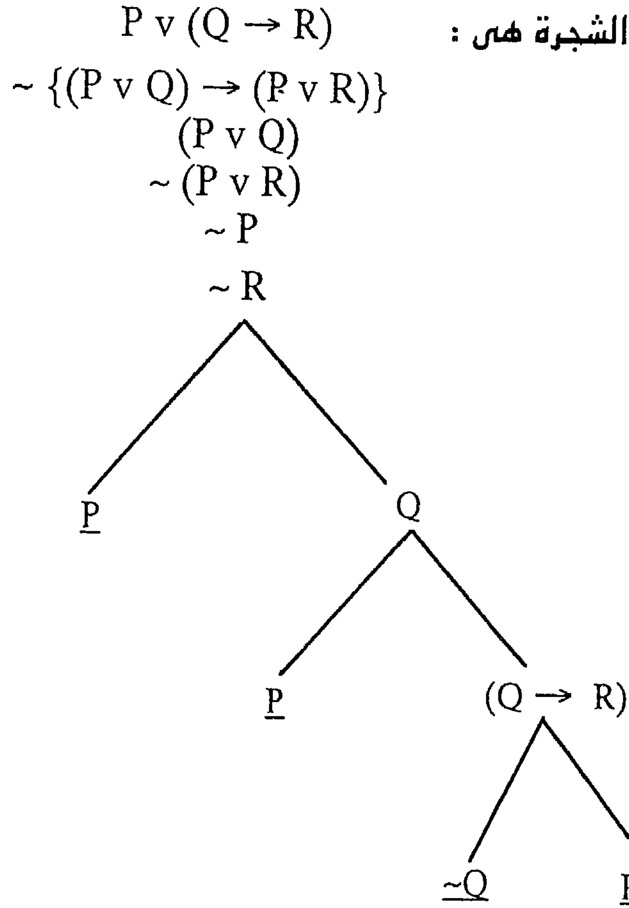
استخدام أحد الأساليب الدلالية التى درستها فى اختبار صحة المتتابعة التالية، ثم برهن على صحتها اشتقاقياً :

$$P \vee (Q \rightarrow R) \vdash (P \vee Q) \rightarrow (P \vee R)$$

الحل :

سنستخدم أسلوب الأشجار الدلالية فى اختبار صحة المتتابعة عن طريق محاولة تكوين نموذج عكسى، فإذا نجحنا فى إيجاد فرع واحد على الأقل يحقق هذا النموذج كانت المتتابعة غير صحيحة، وإذا لم ننجح فى أى من فروع الشجرة الممكنة كانت المتتابعة صحيحة . ومن الطبيعى أن يكون البرهان مترتبا على كون المتتابعة صحيحة دلاليا. أى من الضرورى أن يكون النموذج العكسى غير متسق حتى نستطيع أن نبرهن على النتيجة من المقدمات. وهذا ما سنراه الآن.

الشجرة هى :



بما أننا أغلقنا فروع الشجرة جميعاً فالنموذج العكسى غير متسق، ومن ثم تكون المتتابعة المختبرة صحيحة. وعلينا الآن تركيب برهان لاشتقاق نتيجتها من مقدمتها. وقبل أن نفعل ذلك نصف باختصار خطوات الشجرة الدلالية التى قدمناها .

بعد تحديد النموذج العكسى المطلوب بدأنا التفريع من سلب النتيجة (السطر الثانى)، لأنها تؤدى إلى فرع واحد فقط ينتظم فيه مقدم التضمن وتحته نفى التالى، ثم بعد ذلك طبقنا التفريع على الفصل المنفى "~(PvP)

" لنفس السبب، فى الخطوة التالية يستوى لتفريع من السطر الأول، أو الثالث (يمكن للقارئ أن يجرب خلاف ما فعلنا بنفسه) المهم أن الفروع جميعاً تنطوى على تناقض مما يعنى إغلاق جميع الفروع، وهكذا تصل إلى اثبات صحة المتتابعة، الآن نقدم البرهان على المتتابعة بقواعد الاستنباط الطبيعى .

البرهان:

1	(1)	$P \vee (Q \rightarrow R)$	Ass
2	(2)	$P \vee Q$	Ass
3	(3)	P	Ass
3	(4)	$P \vee R$	(3), vI
5	(5)	$Q \rightarrow R$	Ass
6	(6)	Q	Ass
5,6	(7)	R	(5), (6), →E
5,6	(8)	$P \vee R$	(7), vI
2,5	(9)	$P \vee R$	(2),(3),(4),(6),(8), vE
1,2	(10)	$P \vee R$	(1),(3),(4),(5),(9),vE
1	(11)	$(p \vee Q) \rightarrow (p \vee R)$	(2), (10),→I

تتمثل استراتيجية البرهان الأساسية فى افتراض مقدم النتيجة واشتقاق تاليها من هذا الافتراض بالتعاون مع الافتراض الأول الذى يمثل مقدمة المتتابعة. أما التكتيك الداخلى والذى وصلنا بموجبه إلى السطر العاشر الحاسم فهو الذى ينطوى على درجة من التعقيد بسبب تشابك تطبيق قاعدة حذف الفصل مرتين، لأن الافتراضين المطلوب الاشتقاق منهما صيغتان فصليتان ،

أحد أوجه هذا التشابك هو استخدام الافتراض الثالث أكثر من مرة لتطبيق قاعدة حذف الفصل ؛ والسبب أنه طرف أول فى كلا الفصلين المطلوب اشتقاق تالى النتيجة منهما. وهذا يثير نقطة تتعلق بمعنى رفع الافتراض الذى يحدث عند تطبيق بعض قواعد النسق مثل تقديم التضمن أوحذف الفصل.والنقطة المشار اليها تتمثل فى أن رفع افتراض معين لتطبيق قاعدة معينة لا يعنى ضرورة اختفائه من كل سطور البرهان التى تلى السطر الذى رفع فيه على وجه الاطلاق. الصحيح أنه يمكن اعادة استخدام نفس الافتراض أكثر من مرة دون قيد أو شرط. وفكرة رفع الافتراض لاتسرى إلا على السطر الذى تطبق فيه القاعدة المعينة فقط (١).

أما الوجه الثانى للتشابك فيتمثل فى ترتيب توظيف الافتراض الخامس والسادس بما يخدم تطبيق حذف الفصل مرتين متتاليين فى السطرين التاسع والعاشر. صحيح أنه كان من الممكن ترتيبها بصورة عكسية ، ولكن المهم هو رفع الافتراض فى السطر الملائم. ولذلك يجب ألا نجد غرابة فى وجود نفس النتيجة فى السطور من الثامن حتى العاشر ، لأننا بصدد سطر مختلف فى كل حالة. ويرتبط بهذابحقيقةأنه ليس من الممكن استخدام السطر الثامن بدلا من التاسع فى التطبيق الثانى لحذف الفصل ، وذلك حتى نشتق المطلوب من الافتراضين الاول والثانى تحديداً.

(١) تلجأ بعض الأنساق إلى إضافة قاعدة تسمى بالتكرار ، بمعنى أن أى افتراض يمكن تكراره فى سطر لاحق وإعادة استخدامه . الدافع الأساسى لهذه القاعدة يتمثل عادة فى أن المنطقى يحاول جعل برهانه واضحاً قدر الإمكان ، فضلا عن أنه يساعد فى توضيح النقطةالتى نحن بصددها . ولكننا اتساقاً مع اتجاهنا فى تجنب عدم زيادة القواعد قدر الإمكان لانفسح مكاناً لهذه القاعدة ونرى كذلك أنها غير ضرورية للإطلاع على أحد الأنساق التى تطبق قاعدة التكرار راجع
Simpson, R. (1988), pp. 74 - 76

الفصل الثالث
النفي والنفي المزدوج

الفصل الثالث

النفى والنفى المزدوج

تتعلق القواعد التى سندرسها فى هذا الفصل بثابت النفى، وهو يختلف عن بقية الثوابت التى درسنا قواعدها حتى الآن. ومصدر الخلاف تركيبى، وهو أن النفى يتعلق بصيغة واحدة أو طرف واحد سواء كان صيغة بسيطة (أى صيغة لا تحتوى على ثوابت من أى نوع[1])، أو مركبة. أما الثوابت الأخرى فتربط بين طرفين. غير أن هذا الاختلاف لا يؤدى إلى تعقيدات من أى نوع فيما يخص قواعد ثابت النفى.

وخلافاً لمعظم أنساق الاستنباط الطبيعى المعروفة سنستخدم فى تناول قاعدتى تقديم وحذف النفى ثابتاً آخر هو ثابت التناقض، بل من الممكن النظر إلى هاتين القاعدتين باعتبارهما قاعدتى حذف وتقديم لثابت التناقض أيضاً، على أساس أن قاعدة تقديم النفى ستكون قاعدة لحذف التناقض، وقاعدة حذف النفى تقديماً للتناقض. وهذا ما سيتبين من خلال المعالجة التفصيلية فى الصفحات التالية.

ونضيف لقاعدتى تقديم وحذف النفى فى معالجتنا هنا قاعدة خاصة لحذف النفى المزدوج، فضلاً عن قاعدة حذف النفى، وهذا يختلف عما يفعله نيوتن سميث وسمبسون[2]، ذلك أنهما يجعلان منهما قاعدة واحدة، أو بالأحرى ينكرون حذف النفى، ويعطون الثانية إسمها. أما عن نسقنا الحالى

---

(١) المقصود بالصيغة التي لا تحتوي على ثوابت أن تكون الصيغة عبارة عن متغير واحد مثل "Q" أو "P" أو غيرهما، ذلك أنه لا يمكن تصور صيغة أخرى إلا مع وجود ثوابت منطقية فيها.

(٢) راجع في هذا الصدد

Newton-Smith (1985), pp. 51 - 52.
Simpson (1988), pp. 52 - 53.

فيميز بين حذف النفى وحذف النفى المزدوج لأسباب نسقية وفلسفية ستتضح فى الصفحات التالية وبهذا تكون قاعدة النفى المزدوج مع قاعدة الإفتراض الحر هما القاعدتان الخاصتان فقط، أى القاعدتان اللتان لا تتعلقان بنفى أو تقديم ثابت معين بصورة مباشرة، والآن ننتقل إلى عرض قواعد النفى.

١ - حذف النفى Negation Elimination

قلنا إن قاعدة حذف النفى تعتبر قاعدة لتقدم التناقض فى نفس الوقت، وهى قاعدة تستغنى عنها أنساق كثيرة، غير أننا نثبتها هنا لمبررات نسقية معينة كما قدمنا. تقول القاعدة إنه إذا كانت لدينا متتابعة نتيجتها الصيغة"A" ، وكان لدينا متتابعة أخرى نتيجتها نفى "A" ، فيمكن تكوين متتابعة جديدة مقدماتها هى مجموع مقدمات المتتابعتين السابقتين ونتيجتها هى ثابت التناقض، ويمكن التعبير عن هذا الأمر رمزياً كما يلى :

$$\frac{X \vdash A \quad Y \vdash \sim A}{X, Y \vdash \Lambda} \sim E$$

وتعنى القاعدة ببساطة أنه من التناقض أن نجمع بين ما يؤدى إلى قضية ونفيها فى نفس المتتابعة. ونلاحظ أن مصدر التسمية بحذف النفى هو أن إحدى نتيجتى المتتابعتين قضية منفية، والمتتابعة الجديدة لا تحتوى على هذا النفى. وواضح أيضاً سبب التسمية البديلة، وهى تقديم التناقض، يتمثل فى أن المتتابعة الجديدة نتيجتها تناقض، أى أن القاعدة تقدم لنا الشروط الضرورية لتقديم ثابت التناقض. والآن نأخذ مثالاً مبسطاً لتطبيق هذه القاعدة.

مثال (١) برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$P \vee \sim Q, \sim P \vdash Q \rightarrow \Lambda$$

البرهان

1	(1)	P v ~Q	Ass
2	(2)	~P	Ass
3	(3)	Q	Ass
4	(4)	P	Ass
2,4	(5)	Λ	(2),(4), ~ E
6	(6)	~Q	Ass
3,6	(7)	Λ	(3),(6), ~ E
1,2,3	(8)	Λ	(1),(4),(5),(6),(7), vE
1,2	(9)	$Q \rightarrow \Lambda$	(3),(8), $\rightarrow$ I

الخطوتان (١) و (٢) مألوفتان. فى السطر الثالث نفترض مقدم النتيجة لأنها قضية تضمنية. المطلوب هنا الوصول أولاً إلى إثبات التناقض من الإفتراضات الثلاثة ثم تطبيق قاعدة تقديم التضمن بعد ذلك لكى نصل إلى النتيجة المطلوبة. وفى هذا الإطار لابد من تطبيق قاعدة حذف الفصل لأن إحدى الإفتراضات التى نحتاج إلى الإنطلاق منها عبارة عن صيغة فصلية.

ولكى نطبق قاعدة حذف الفصل نفترض الطرف الأول "P" فى السطر الرابع، ونصل إلى التناقض من هذا السطر مأخوذا مع السطر الثانى بتطبيق قاعدة حذف النفى. ومن ناحية أخرى نفترض فى السطر السادس الطرف الثانى من علاقة الفصل، ونصل منه بالتعاون مع السطر الثالث إلى تناقض فى السطر السابع. وهكذا تكتمل كل العناصر التى تجعل من حقنا الوصول إلى التناقض بتطبيق قاعدة حذف الفصل من المقدمات الأولى والثانية والثالثة. ونقوم بعد ذلك بتقديم التضمن من نتيجة السطر الثالث إلى نتيجة السطر الثامن، وهو المطلوب إثباته.

مثال (٣) برهن على ما يلى :

$$P \to Q,\ P \to \sim Q \vdash P \to \Lambda$$

البرهان

1	(1)	$P \to Q$	Ass
2	(2)	$P \to \sim Q$	Ass
3	(3)	P	Ass
1,3	(4)	Q	(1),(3), $\to$ E
2,3	(5)	$\sim Q$	(2),(3), $\to$ E
1,2,3	(6)	Λ	(4),(5), $\to$ ~E
1,2	(7)	$P \to \Lambda$	(3),(6), $\to$ I

فى السطر الأول افترضنا المقدمة الأولى، وفى السطر الثانى الثانية. فى السطر الثالث افترضنا "P" ، وهى مقدم التضمن. نطبق فى السطرين الرابع والخامس قاعدة حذف التضمن مرتين لنصل إلى "Q" مرة ، ونفى "Q" مرة أخرى. وهذا يخول لنا حق تطبيق قاعدة حذف النفى فى السطر السادس، ومن ثم اشتقاق التناقض من مجموع مقدمات المتتابعتين الموجودتين فى السطرين الرابع والخامس.

لاحظ هنا أن مجموع المقدمات لا يتكرر فيه ورود المقدمة الواحدة، وهى رقم "3" التى ظهرت فى المتتابعتين، وذلك لأن ورود المقدمة مرة واحدة يكفى عوضاً عن أى عدد من المرات. أما فى حالة السطور التى نستخدمها فى تركيب المتتابعة فيجب إثبات السطر فى كل مرة يستخدم فيها[1]. بعد ذلك يكون المطلوب جاهزاً. بتطبيق قاعدة تقديم التضمن نحصل على

(١) راجع فى هذا الصدد المثال رقم ١٢ في الفصل السابق

المتتابعة المطلوب البرهـان عليها، أى النتيجة المحـددة من المقدمـات المعطـاة لا أكثر ولا أقل.

٣- قاعدة تقديم النفى Negation Introduction

تتكامل قاعدة تقديم النفى مع قاعدة حذف النفى بصورة كبيرة. فنحن لا نستطيع إشتقاق قضية منفية إلا إذا إشتققنا تناقضاً من مجموعة من المقدمات. والفكرة أن إشتقاق التناقض من مجموعة المقدمات يعنى إمكانية استنباط نفى أحد هذه المقدمات من الباقى. والصورة العامة للقاعدة تبدو على الوجه التالى :

$$\frac{X \vdash \Lambda}{X \backslash A \vdash \sim A} \sim I$$

تقول الصورة العامة للقاعدة إنه إذا أدت مجموعة من المقدمات إلى التناقض، فيمكن أخذ إحدى المقدمات وطرحها من أفراد المجموعة "X"، وإشتقاق نفيها من بقية هذه المقدمات. وقبل أن نشرع فى تحليل القاعدة نعيد التأكيد على أنه يمكن إعتبارها قاعدة لحذف التناقض، وهنا نتذكر أيضاً أن قاعدة حذف النفى المقابلة لقاعدتنا هذه يمكن إعتبارها قاعدة لتقديم التناقض.

أما عن القاعدة التى بين أيدينا الآن فهى تعنى أن المتتابعة الأولى تحتوى على مجموعة من المقدمات التى يلزم عنها تناقض، وعن طريق تطبيق القاعدة نستطيع إختيار إحدى المقدمات وإستنباط نفيها من بقية المقدمات. وجدير بالذكر أنه لا قيد على إختيار المقدمة التى نقوم برفعها من مجموعة المقدمات "X". الإعتبار الوحيد الذى يوجهنا هو اختيار المقدمة المناسبة،

أى تلك التى يساهم إشتقاق نفيها من باقى المقدمات فى الوصول إلى إثبات المتتابعة النهائية. بل قد تكون المقدمة التى نستنبط نفيها بواسطة القاعدة من غير أفراد المجموعة "X"، ولكن بشرط أن تكون إفتراضا، على أن نقوم برفعه أثناء تطبيق القاعدة[١].

ولكن ماذا عن تبرير هذه القاعدة؟ نقول إن المتتابعة التى نبدأ منها، وهى المتتابعة الموجودة فوق الخط فى الصورة العامة المعروضة فى السطور السابقة يجب أن تكون صحيحة. ولأنها صحيحة ونتيجتها تناقض، يجب أن تنطوى مجموعة المقدمات على تناقض ضمنى أو صريح، وإلا أصبحت المتتابعة نفسها غير صحيحة، وهذا تناقض. أما المتتابعة التى تتيح لنا القاعدة تركيبها فتكون صحيحة لأنه سواء كانت الصيغة التى نستنتج نفيها من الباقى صادقة أو كاذبة تبقى المتتابعة صحيحة. فإذا كانت صادقة فإن نفيها كاذب وتبقى المقدمات منطوية على إحدى القضايا الكاذبة، مما يعنى أن المتتابعة صحيحة، لأن الكذب يلزم عنه كذب. أما إذا كانت المقدمة كاذبة، فإن نفيها صادق، وهذا يكفى لإثبات صحة اللزوم من المقدمات الباقية إلى النتيجة (الجديدة) الصادقة بغض النظر عن حالة المقدمات من الصدق أو الكذب وهكذا نجد أن المتتابعة تكون صحيحة فى كلتا الحالتين، ومن ثم تكون القاعدة سليمة فى كل الأحوال. والآن إليك بعض الأمثلة لتوضيح تطبيق هذه القاعدة.

---

(١) يشبه تقديم النفى فى هذا الجانب قاعدة تقديم التضمن، التى تنطوى على رفع افتراض ما، وقد يكون هذا الإفتراض من غير أفراد مجموعة المقدمات التى نبدأ منها. للمهم فى القاعدتين أنه إذا كانت المقدمة أو الإفتراض ضمن أفراد مجموعة المقدمات "X" يجب رفعها. فإذا لم يكن فلا تغيير سيحدث فى المجموعة "X". ذلك أن $X\backslash A = X$ فى هذه الحالة.

مثال (٣)

برهن على صحة المتتابعة التالية

$$P \rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P$$ [1]

البرهان

1	(1)	$P \rightarrow Q$	Ass
2	(2)	$\sim Q$	Ass
3	(3)	P	Ass
1,3	(4)	Q	(1),(3), $\rightarrow$ E
1,2,3	(5)	Λ	(2),(4), $\sim$ E
1,2	(6)	$\sim P$	(3),(5), $\sim$ I

أشرنا فى التمهيد لقاعدة تقديم النفى أن هذا القاعدة ترتبط بخطة برهانية محددة. تبدأ الخطة عادة بملاحظة أن النتيجة المطلوب الوصول إليها قضية منفية. وعلى هذا تبدأ خطتنا بافتراض نفى النتيجة، ثم اشتقاق تناقض محدد من هذا الإفتراض الزائد بالإشتراك مع إفتراضات أخرى لنصل إلى إشتقاق نفى هذا الإفتراض من بقية المقدمات.

وهذا بالضبط ما حدث فى برهاننا الحالى، فى السطرين (1) و (2) إفترضنا مقدمتى المتتابعة، وفى السطر الثالث إفترضنا نقيض النتيجة الأصلية. فى السطر الرابع طبقنا قاعدة حذف التضمُن لنصل منها إلى

---

(١) تطابق هذه المتتابعة إحدى مصادرات النسق الرواقي، وعرفت فى العصور الوسطى باسم Modus Tollendo Tollens وتجدر الإشارة إلى أن نسق Lemmon يحتوى على تعميم لهذه المتتابعة كإحدى قواعد النسق، ولهذا ميزة تبسيط بعض البراهين. غير أننا نستطيع الإستغناء عنها عن طريق تطبيق قاعدتى النفى فضلاً عن حذف التضمن كما يبين المثال الحالى. قارن فى هذا الصدد : Lemmon (1965), pp. 12 - 13.

"Q" مما يؤدى إلى إشتقاق التناقض بينها وبين نتيجة السطر الثانى، وهذا ما حدث فى السطر الخامس، والتناقض مشتق من الإفتراضات الثلاثة جميعاً. فى السطر الأخير تكتمل دائرة الخطة البرهانية لنشتق نفى الإفتراض الثالث من الإفتراضين الأول والثانى، وهو المطلوب إثباته. لاحظ أنه كان بالإمكان إشتقاق "$P \rightarrow \Lambda$" ، من نفس المقدمتين وهو يكافئ نفى "P" لولا أن هذا لم يكن مطلوباً البرهان عليه.

مثال (٤) : برهن على صحة المتتابعة

$$\sim (P \,\&\, Q), P \vdash \sim Q$$ (1)

البرهان

1	(1)	~ (P & Q)	Ass
2	(2)	P	Ass
3	(3)	Q	Ass
2,3	(4)	(P & Q)	(2),(3), & I
1,2,3	(5)	Λ	(1),(4), ~ E
1,2	(6)	~ Q	(3),(5), ~ I

لكى نبرهن على صحة المتتابعة افترضنا مقدمتى المتتابعة المطلوبة فى السطرين الأول والثانى. نلاحظ بعد ذلك أنه ليس هناك طريق مباشر لإثبات "Q~" من الإفتراض الأول والثانى.

وإذا توقفنا عند هذا البرهان الرمزى نرى بجلاء السبب الذى يجعلنا نطلق على نظرية البرهان إسم الإستنباط الطبيعى فالمقدمتان تقولان إننا

(١) تطابق هذه المتتابعة مع إحدى الصور الرئيسية الخمس للبراهين لدى المناطقة الرواقيين، ويطلق عليها مناطقة العصور الوسطى Modus Ponendo Tollens راجع الفصل الثاني من : أحمد أنور (١٩٨٣).

إذا قبلنا عدم إجتماع صدق قضيتين، وقبلنا صدق إحداهما، فالنتيجة التى تلزم عن هذا هى أن القضية الثانية تكون كاذبة. ولنثبت هذا نفترض صدقها، مما يعنى إجتماع صدق القضيتين اللتين افترضنا عدم اجتماع صدقهما فى البداية، وهذا تناقض. إذن فالإفتراض الخاص بصدق القضية الثانية غير ملائم، فتكون كاذبة. وهكذا يلتقى نسقنا المنطقى مع التفكير الطبيعى للإنسان العادى فى كثير من الأحيان.

مثال (٥) : برهن على صحة المتتابعة

$$\sim P \vdash P \rightarrow \sim Q$$

البرهان

1	(1)	$\sim P$	Ass
2	(2)	P	Ass
3	(3)	Q	Ass
1,2	(4)	Λ	(1),(2), ~ E
1,2	(5)	$\sim Q$	(3),(4), ~ I
1	(6)	$P \rightarrow \sim Q$	(2),(5), → I

فى السطر الأول افترضنا مقدمة المتتابعة، وفى السطر الثانى افترضنا مقدم النتيجة بهدف إشتقاق التالى (وهو "~Q") من الإفتراضين، ثم نلجأ إلى الطريق غير المباشر، وهو افتراض نقيضها، وهو "Q" فقط، وإشتقاق تناقض من الإفتراضات الثلاثة لنصل إلى إثبات نفى "Q" من الإفتراضين الأولين.

وسريعاً ما نجد أن هذه الخطة الفرعية فى متناول أيدينا، فنجد التناقض قائماً بين السطرين الأول والثانى، هذا ما نثبته فى الخطوة الرابعة، وتأتى الخطوة الخامسة تطبيقاً لتقديم النفى (أو حذف التناقض)،

ومنها نشتق نفى أحد الإفتراضات من بقيتها. ولعلنا نلاحظ أن "Q" التى إستنبطنا نفيها لم تكن ضمن المجموعة التى أدت إلى التناقض وليس فى هذا ما يعيب القاعدة، فهى تقول فقط إنه إذا كانت "Q" ضمن المجموعة يجب رفعها، وإشتقاق نفيها من الباقى.

هناك ملحوظة أخرى على المتتابعة، وبرهانها، تتلخص فى أن بإمكاننا وضع أى صيغة (ثابتها الرئيسى هو النفي) مكان "~Q" ، والبرهان يأخذ نفس الخطوات تحديداً، أى أن المتتابعات التالية كلها صحيح وبنفس خطوات البرهان.[١]

$$\sim P \vdash P \rightarrow \sim R$$
$$\sim P \vdash P \rightarrow \sim (R \,\&\, Q)$$
$$\sim P \vdash P \rightarrow \sim (P \vee R)$$

مثال (٦) برهن على ما يلى باستخدام قواعد الإستنباط الطبيعي

$$\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \,\&\, \sim Q$$

البرهان

1	(1)	$\sim (P \vee Q)$	Ass
2	(2)	P	Ass
2	(3)	$(P \vee Q)$	(2), vI
1,2	(4)	Λ	(1), (3), ~ E
1	(5)	$\sim P$	(2), (4), ~ I
6	(6)	Q	Ass
6	(7)	$(P \vee Q)$	(6), vI
1,6	(8)	Λ	(1), (7), ~ E
1	(9)	$\sim Q$	(6), (8), ~ I
1	(10)	$\sim P \,\&\, \sim Q$	(5), (9), & I

---

(١) سنعود لهذه الملاحظة، ودلالتها بشئ من التفصيل في القسم التالي من هذا الفصل.

نحاول الآن قراءة هذا البرهان معا. فى السطر الأول وضعنا المقدمة الوحيدة كافتراض. ماذا تم بعد ذلك؟ وكيف وصلنا بعد تسعة سطور إضافية إلى النتيجة الموجودة؟

إن مفتاح الإجابة هو تركيبة النتيجة المطلوبة. وهى عبارة عن وصل، ولهذا فالخطة العامة للبرهان تتمثل فى محاولة اشتقاق كل طرف على حدة، ثم اشتقاق النتيجة عن طريق تطبيق قاعدة تقديم الوصل. المرحلة الأولى بدأت فى السطر الثانى وانتهت بالخامس الذى يمثل متتابعة نتيجتها هى الطرف الأول من الوصل المطلوب. المرحلة الثانية تغطى السطور من السادس حتى التاسع الذى يتمثل فى متتابعة نتيجتها هى الطرف الثانى من الوصل المطلوب. ولهذا فالسطر الأخير هو المرحلة الأخيرة وفيه تم تطبيق قاعدة تقديم الوصل.

المرحلتان الأولى والثانية متماثلتان من حيث الخطة البرهانية الجزئية التى تطبق فى كل منهما. تبدأ كل منهما بافتراض نقيض المطلوب (السطران الثانى والسادس) لنصل بتطبيق قاعدة تقديم النفى (فى السطرين الخامس والتاسع) إلى المطلوب، وتخلل ذلك تطبيق لقاعدتى الفصل وحذف النفى لكى نشتق طرفى الوصل كلا على حدة.

٣- النفى المزدوج

ذكرنا فيما سبق أن قاعدة حذف النفى غير موجودة فى كثير من أنساق الإستنباط الطبيعى المعاصرة. ونجد عادة قاعدة أخرى بنفس الإسم بدلاً منها، وهى ما سنسميه نحن قاعدة (حذف) النفى المزدوج Double Negation (elimination). وطبقاً للنسق الذى نعرضه فى هذه الدراسة فالقاعدتان متمايزتان، ولكل منهما دوره المستقل. وقد سبق لنا

تناول قاعدة حذف النفى بالتحليل المصحوب ببعض الأمثلة فى القسم الأول من هذا الفصل.

أما قاعدة (حذف) النفى المزدوج فتقول إنه إذا كانت لدينا متتابعة نتيجتها نفى مزدوج لصيغة سواء بسيطة أو مركبة، يمكن بتطبيق القاعدة أن نستنبط الصيغة البسيطة أو المركبة، مع حذف ثابتى النفى المتجاورين السابقين على الصيغة مباشرة. وتبدو الصورة العامة للقاعدة على النحو التالي(١) :

$$\frac{X \vdash \sim\sim A}{X \vdash A}$$

ويمكن تبرير هذه القاعدة من وجهة النظر الكلاسيكية على أساس المقولة المشهورة فى تاريخ المنطق التى تقول إن نفى النفى إثبات. وتوضح قائمة الصدق هذا الأمر ببساطة شديدة. تصور أن هناك صيغة معينة لها قيم معينة تحت ثابتها الرئيسى بحسب حالات متغيراتها. إذا نفينا الصيغة تأخذ قيم مخالفة بحيث تصبح كل قيمة صدق قيمة كذب، وبالعكس، فإذا

---

(١) يضيف لمون ما يمكن اعتباره قاعدة مقابلة لحذف النفى المزدوج، ننتقل بموجبها من الصيغة "A" إلى نفى نفيها. والصورة العامة لها هى $\frac{X \vdash A}{X \vdash \sim\sim A}$ غير أننا نرى أن هذه القاعدة زائدة عن الحاجة، لأن بإمكاننا الوصول إلى نفى نفى صيغة بتطبيق القواعد الموجودة بالفعل. وهذا ما توضحه الخطوات التالية :

A	$\vdash$	A	Ass
~ A	$\vdash$	~ A	Ass
A, ~ A	$\vdash$	Λ	~ E
A	$\vdash$	~ ~ A	~ I

وبهذا يمكننا الاكتفاء بالقاعدة كما تظهر هنا. قارن فى هذا الصدد :

Lemmon, E. J. (1965), pp. 13 - 14.

نفينا هذا النفى تغيرت القيم الجديدة أى صارت مطابقة للقيم التى كانت عليها الصيغة الأصلية. وإلى هنا وقاعدة النفى المزدوج تتسم بالبراءة والبساطة التى تتسم بها كل قواعد النسق الأخرى. تأمل المثال التالى كتطبيق لها.

مثال (٧) : برهن على صحة المتتابعة التالية :

$P \vee Q, \sim Q \vdash P$ [1]

البرهان

1	(1)	P v Q	Ass
2	(2)	~ Q	Ass
3	(3)	~ P	Ass
4	(4)	P	Ass
3,4	(5)	Λ	(3),(4), ~ E
6	(6)	Q	As
2,6	(7)	Λ	(2),(6), ~ E
1,2,3	(8)	Λ	(1),(4),(5),(6),(7), vE
1,2	(9)	~ ~ P	(3),(8), ~ I
1,2	(10)	P	(9), DN

يكشف تحليل خطوات البرهان عن أن الخطة العامة هى تقديم إفتراض زائد فى السطر الثالث هو نفى النتيجة، والوصول منه إلى تناقض، ومن ثم نطبق قاعدة تقديم النفى لنصل إلى نفى نفى النتيجة، ولهذا سنحتاج إلى قاعدة النفى المزدوج التى نصل منها إلى الصيغة "P" .

(١) تتطابق هذه المتتابعة مع إحدى صور البراهين الرئيسية الخمس لدى الرواقيين، ويطلق عليها مناطقة العصور الوسطى الإسم التالى : Modus Tollendo Ponens.

أما الخطة الفرعية التى ساعدتنا فى الوصول من الفرض الزائد إلى التناقض فقد اعتمدت على تطبيق قاعدة حذف الفصل، لأن إشتقاق التناقض يعتمد بالضرورة على المتتابعة الموجودة فى السطر الأول. وقد استغرق هذا السطور من الرابع حتى الثامن.

ونتوقف هنا قليلاً لتقرير حقيقة هامة، وهى أنه لولا قاعدة النفى المزدوج لما أمكن إشتقاق النتيجة على الإطلاق. وأقصى ما نستطيع الوصول إليه هو المتتابعة:

$$P \vee Q, \sim Q \vdash \sim\sim P$$

وهى التى تمثل السطر التاسع من البرهان الذى نحن بصدد تحليله ولعل فى هذا ما يوضح مدى أهمية القاعدة بالنسبة للنسق المنطقى الكلاسيكى الذى نعرضه فى هذا الدراسة

مثال (٨) : برهن على صحة المتتابعة التالية[١]

$$(\sim R \,\&\, Q) \rightarrow \sim P \vdash (P \,\&\, Q) \rightarrow R$$

البرهان

1	(1)	$(\sim R \,\&\, Q) \rightarrow \sim P$	Ass
2	(2)	$(P \,\&\, Q)$	Ass
3	(3)	$\sim R$	Ass
2	(4)	Q	(2), & E
2,3	(5)	$(\sim R \,\&\, Q)$	(3),(4), & I
1,2,3	(6)	$\sim P$	(1),(5), → E
2	(7)	P	(2), & E
1,2,3	(8)	Λ	(6),(7) ~E
1,2	(9)	$\sim\sim R$	(3), (8), ~I
1,2	(10)	R	(9), DN
1	(11)	$(P \,\&\, Q) \rightarrow R$	(2),(10), → I

---

(١) يمكن اعتبار هذه المتتابعة صورة منطقية لعملية الرد غير المباشر فى المنطق التقليدى الأرسطي، وفيها نأخذ نفى نتيجة القياس مع إحدى المقدمتين لينتج منهما نفى المقدمة =

فى السطر الأول إفترضنا المقدمة، وفى السطر الثانى إفترضنا مقدم النتيجة على اعتبار أن الخطة العامة تتمثل فى تطبيق قاعدة تقديم التضمن فى السطر الحادى عشر بعد الوصول إلى تالى النتيجة من الإفتراضين الأول والثانى.

الخطة الفرعية التى نستخدمها فى الوصول إلى "R" تعتمد على إفتراض نفيها فى السطر الثالث، بهدف الوصول إلى تناقض فى السطر الثامن من هذا الإفتراض بالتعاون مع الإفتراض الأول والثاني مما يجعل فى إمكاننا إشتقاق الصيغة نفسها. غير أن القاعدة (تقديم النفي) تتيح لنا الإنتقال إلى نفى نفى "R" فقط، وليس إلى "R" مباشرة. وهنا يأتى دور قاعدة النفى المزدوج المكمل، فاستخدمت فى إشتقاق "R" من نفى نفى "R".

مثال (٩) :برهن على صحة المتتابعة التالية :

$$\{ (P \to \Lambda) \to \Lambda\} \to \Lambda \;\vdash\; \sim P$$

= الأخرى فإذا كان الضرب الناتج يطابق أحد ضروب الشكل الأول المنتجة كان ذلك تدعيماً للضرب القياسى الذى نقوم برده إليه. ولسنا معنيين هنا بالبحث فى نظرية الرد غير المباشر، ولا فى موقع نظرية القياس التقليدية من المنظور الصورى الحديث. وكل ما يهمنا أن المتتابعة التى تبرهن على صحتها تمثل الأساس الصورى المتين لنظرية الرد غير المباشر على مستوى نظرية الاستنباط الأساسية، والتى نفرد لها هذه الدراسة. أما تناول نظرية القياس والمنطق التقليدى برمته بالأدوات المنطقية المعاصرة فيحتاج إلى وقفة أخرى.

ومن ناحية أخرى نجد فى المنطق الرواقى قاعدة تقول إنه إذا كان لدينا إستدلال من مقدمتين على نتيجة يمكن أن نأخذ نفى النتيجة مع إحدى المقدمتين أثبتنا نفى المقدمة الأخرى أى أنهم يقبلون الإستدلال من النتيجة إلى المقدمة فى المتتابعة التى نقوم بتحليلها فى المثال رقم (٨). راجع رسالتنا للماجستير، الفصل الثانى.

البرهان :

1	(1)	$\{(P \to \Lambda) \to \Lambda\} \to \Lambda$	Ass
2	(2)	P	Ass
3	(3)	$\sim (P \to \Lambda)$	Ass
4	(4)	$(P \to \Lambda)$	Ass
3,4	(5)	Λ	(3),(4), ~ E
3	(6)	$\{(P \to \Lambda) \to \Lambda\}$	(4),(5), → I
1,3	(7)	Λ	(1),(6),→ E
1	(8)	$\sim\sim (P \to \Lambda)$	(3),(7), ~E
1	(9)	$(P \to \Lambda)$	(8), DN
1,2	(10)	Λ	(2),(9). → E
1	(11)	$\sim P$	(2),(10), ~ I

هذه المتتابعة الطريفة(١) تعتمد على توظيف ثابت الكذب بشكل واضح، والبرهان عليها يعتمد على خطة برهانية محددة. فى السطر الثانى نفترض نقيض النتيجة بغرض الوصول إلى التناقض فى السطر العاشر، ومن ثم الحصول على النتيجة بتقديم النفى. ونلاحظ معاً أنه لا يوجد طريق مباشر للوصول إلى هذا المطلوب. إن الوصول إلى التناقض من الإفتراضين لن يتحقق بحذف النفى كما تعودنا فى الأمثلة التى قدمناها فى هذا الفصل. والطريقة الأخرى التى يمكن استخدامها هى حذف التضمن. ولذلك يجب

---

(١) هذه المتابعة ذات صلة بما أسميها متتابعة تشيرش التى يمكن صياغتها كما يلى :

$(P \to \Lambda) \to \Lambda \vdash P$

وبرهانها ليس ببعيد عن هذا البرهان. راجع فى هذا الصدد :

Church, A. (1956), p.72.

وإذا فهمنا أن الصيغة التضمنية التى يكون تاليها هو الكذب بمثابة نفى للمقدم كانت قراءتنا لمقدمة متتابعة تشيرش بأنها "P~~" ، ولهذا تؤدى إلى "P"بحذف النفى المزدوج. أما مقدمة المثال رقم (٩) فنقرؤها على الوجه التالى : "P ~ ~ ~" التى تؤدى إلى"P".

اشتقاق "$P \rightarrow \Lambda$" من المقدمة الأولى فقط . ولكى يتم هذا نفترض نفيها فى السطر الثالث ثم نفترضها هى فى السطر الرابع لنصل منهما إلى التناقض.

من التناقض الذى نسجله فى السطر الخامس ننتقل بقاعدة تقديم التضمن إلى استنباط مقدم صيغة المقدمة الأولى. بعد ذلك نستنبط التناقض مرة أخرى بأخذ هذا المقدم مع صيغة الافتراض كلها فى السطر السابع. وهنا نستنبط نفى (3) ، وبالنفى المزدوج نحصل على "$(P \rightarrow \Lambda)$" ، وهذا يجعلنا قادرين على استنباط النتيجة الموجودة بالضبط كما قدمنا.

مثال (١٠)

نأتى إلى أهم النتائج المرتبطة بقاعدة النفى المزدوج، ونقصد بها مبرهنة الثالث المرفوع، أو الوسط الممتنع المعروفة منذ القدم كأحد قوانين الفكر الأساسية، فضلاً عن قانون الهوية، وقانون عدم التناقض. نتأمل أولاً البرهان على هذه النتيجة الهامة، ونقوم بتحليله، ثم ننتقل إلى مناقشتها من زوايا عديدة. الصيغة الخاصة بقانون الثالث المرفوع هى "$\vdash P \vee \sim P$"

البرهان

1	(1)	$\sim (P \vee \sim P)$	Ass
2	(2)	P	Ass
2	(3)	$(P \vee \sim P)$	(2), vI
1,2	(4)	Λ	(1),(3), ~ E
1	(5)	$\sim P$	(2),(4), ~ I
1	(6)	$(P \vee \sim P)$	(5), vI
1	(7)	Λ	(1),(6), ~ E
	(8)	$\sim\sim (P \vee \sim P)$	(1),(7), ~ I
	(9)	$P \vee \sim P$	(8), DN

المتتابعة التى ننشد البرهان على صحتها اشتقاقياً عبارة عن مبرهنة، أى صيغة صحيحة دون الاستناد إلى مقدمات. وتقوم الخطة العامة للبرهان على افتراض نفى المبرهنة فى الخطوة الأولى، بحيث نصل من هذا الإفتراض وحده إلى تناقض فى السطر السابع، ومن هذا التناقض نستطيع بتطبيق قاعدة تقديم النفى أن نستنبط الصيغة "(P v ~ P)~~" مع رفع الإفتراض رقم "1" حسبما تقضى القاعدة. وهكذا نجد أن الصيغة تكون مستنبطة دون مقدمات على الإطلاق، ويبقى فقط تطبيق قاعدة حذف النفى المزدوج فى السطر الأخير لنجد أمامنا المبرهنة المطلوبة.

وتجدر الإشارة إلى أن الحيل البرهانية التى طبقت للوصول إلى التناقض من الإفتراض الأساسى (أى نفى قانون الوسط المرفوع) انطوت على تقديم افتراض زائد هو "P" فى السطر الثانى، ثم الوصول إلى تناقض منه مع الإفتراض الأول ليتحول إلى "P ~" مستنبطا من الإفتراض الأول فعلاً لنصل منه إلى تناقض أيضاً بتطبيق قاعدة تقديم الفصل مرة أخرى[١]، مما يجعل فى إمكاننا إشتقاق نفى نفى الوسط المرفوع، أو الوسط المرفوع نفسه فى خطوة تالية وأخيرة بتطبيق قاعدة حذف النفى المزدوج فى السطر التاسع.

٤- المنطق الحدسى :

كان مبدأ الثالث المرفوع أو الوسط الممتنع دوماً مثار خلاف ونزا ع بين المناطقة فالذين تبنوه ودافعوا عنه اعتبروه أحد أركان المنطق الصورى، وعدوه أحد قوانين الفكر الأساسية مع قانون الهوية (أو الذاتية) وقانون عدم

---

(١) معنى هذا أن الإفتراض الذى صدرنا به خطوات البرهان يتناقض مع كل من "P" ونفيها، مما يؤدى بنا إلى استنتاج كذبه. وبنفس المنطق نستنبط كذب افتراض إذا أدى إلى قضية ونفيها فى نفس الوقت.

التناقض. صحيح أن القوانين الثلاثة تعرضت لانتقادات من اتجاهات عديدة، ولكن قانون الثالث المرفوع ينفرد بقوة معارضيه وكثرتهم النسبية، ووجاهة بعض حججهم(١).

ويقال عادة إن التركيز على قانون الثالث المرفوع ينطوى على خطأ فادح، فالقوانين الثلاثة وجوه لحقيقة واحدة يعبر أحدها عنها، والباقى يرد إليه بالتعريف. ولتأكيد هذا الأمر نجد من يقدم لنا قوائم الصدق كمعيار لتكافؤ الصيغ الثلاث الآتية، وبما يدعم صحتها منطقياً.

a- $P \rightarrow P$

b- $\sim (P \,\&\, \sim P)$

c- $P \vee \sim P$

ويؤسس أصحاب هذا الرأى بناء على هذه الحقيقة ما يفيد بأن نقد قانون الثالث المرفوع بالتحديد تعتبر نقداً للقانونين الآخرين فى نفس الوقت، وهو أمر يصعب تقبله من جانب غالبية المناطقة. أما أصحاب المنطق الحدسى، والاتجاه الحدسى فى فلسفة الرياضيات فيقبلون دون مناقشة قانون الهوية وقانون عدم التناقض، ولكنهم يرفضون قانون الوسط الممتنع. وردهم على الحجة التى أشرنا إليها تواً بسيطة ومباشرة. إنهم يرفضون اعتبار فكرة الصدق أساساً للمنطق، ويضعون بدلاً منها فكرة البرهان. نحن لا نستطيع أن نقرر بالنسبة لقضية ما إذا كانت صادقة أو كاذبة إلا

(١) يتعارض هذا التقييم مع ما هو شائع فى بعض الكتابات العربية من ولاء شديد للمنطق الكلاسيكي، وإستبعاد تلقائى لكل الإنتقادات التى توجه إلى قانون الوسط الممتنع باعتبارها تنطوى على خلط وسوء فهم. ويصل الأمر لدرجة اتهام الرافضين له بعدم إدراك الفرق بين التناقض والتضاد. ومع هذا لا نملك إلا التنويه بأبحاث د. محمد السرياقوسى الذى بنى معارضته للمذهب الحدسى على دراسة معمقة وإن كانت متحيزة أيضاً لهذا المذهب. راجع مثلاً السرياقوسى (١٩٩٣).

بعد وجود برهان على صدقها أو كذبها، فنظرية البرهان عند الحدسيين تسبق نظرية الدلالة (الصدق)، وهذا على العكس تماماً مما يذهب إليه أصحاب المنطق الكلاسيكى.

والواقع أن معارضة الحدسيين للمنطق الكلاسيكى أعمق حتى من هذا البعد الهام. إن الخلاف الجوهرى يتعلق بفلسفة الرياضيات. فالمنطق الكلاسيكى يرتبط أساساً بوجهة نظر معينة حول طبيعة العلاقة بين المنطق والرياضيات. يذهب فريجه ورسل وهما فارسا المذهب الكلاسيكى إلى أن المنطق أساس الرياضيات، وهذا ما يعرف بالإتجاه اللوجستيقى. أما الحدسيون وعلى رأسهم بروور Brouwer، وهايتنج Heyting، وأخيراً مايكل دميت Dummett، فيذهبون إلى رفض هذا الرأى بصورة قاطعة، وأخيراً يعلنون أن المنطق عبارة عن دراسة بعدية، وليست قبلية، لعملية البرهان الرياضية من أجل استخراج قوانينها العامة.

ومن هنا يأتى اهتمامهم بالبرهان سابقاً على اهتمامهم بفكرة الصدق، ولهذا السبب بالتحديد نجد أن الحدسيين يميزون بشكل حاسم بين البرهنة على صفات أو نتائج تتعلق بمجموعات متناهية Finite Sets، وتلك التي تتعلق بمجموعات لا متناهية Infinite Sets. فى الحالة الأولى نستطيع أن نبرهن إما على ثبوت الصفة لأفراد المجموعة المتناهية، أو عدم ثبوتها، وهذا يعنى إنطباق قانون الثالث المرفوع دون إستثناء فى هذه الحالة. أما عند البرهنة، أو محاولة البرهنة فى الواقع على ثبوت صفة أو عدم ثبوتها على أفراد مجموعة لا متناهية نجد أن المحاولة يستحيل إكمالها، أى أن قانون الثالث المرفوع لا ينطبق فى هذه الحالة.

وبهذا ينكر الحدسيون صفة العمومية على قانون الثالث المرفوع، أى ينكرون إنطباقه فى كل الحالات بصورة تلقائية. ونستطيع أن نتصور أسباباً أخرى لتأكيد هذا الرأى. منها الجمل الخبرية التى تتعلق بالماضى، والتى لا

يمكن تحديد صدقها أو كذبها الآن، ولا كان ممكنا بالنسبة للأحداث التى تتعلق بها الجملة أن نقرر ما إذا كانت صادقة أو لا. وعلى سبيل المثال، نقول إن فلاناً كان شخصاً شجاعاً. هذا الشخص مات منذ زمن بعيد، ولم يتعرض فى حياته (على الإطلاق) لموقف تختبر فيه شجاعته، بحيث تكون النتيجة إما بالسلب أو بالإيجاب. هذا المثال يعبر فى رأى بعض الفلاسفة عن قضية لا ينطبق عليها قانون الثالث المرفوع.

نعود إلى موقف الحدسيين من نظرية المنطق الكلاسيكى، فنجد أن رفضهم لقانون الثالث المرفوع يرتبط برفضهم لقاعدة حذف النفى المزدوج فنفى نفى قضية ليس بالضرورة مكافئاً للقضية نفسها. صحيح أن صدق قضية يؤدى إلى صدق نفى نفيها، ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة. ومادام رفض الحدسيين لقانون الثالث المرفوع يستند فقط إلى رفضهم لقاعدة حذف النفى المزدوج فإنهم ملزمون بقبول المبرهنة :

$$\vdash \sim\sim (P \vee \sim P)$$

أى أنهم لا ينكرون نفى نفى قانون الثالث المرفوع، ولكن هذا لا يعنى عندهم القبول التلقائى بالمبرهنة .

$$\vdash P \vee \sim P$$

وقد يرى المنطقى الكلاسيكى أنه لا فرق بين المبرهنتين، ولكن الفرق كما هو واضح يعتمد على قاعدة حذف النفى المزدوج. إذا قبلنا هذا الرأى انتهى الإختلاف بين المنطق الحدسى والمنطق الكلاسيكى، ولكن الحدسيين يصرون على أن هناك إختلافاً كبيراً بين المبرهنتين، نظراً لإختلاف مفهوم النفى فى المنطقين، فتعريف النفى الكلاسيكى يستند إلى شروط الصدق، أى أنه مفهوم دلالى أساساً، أما النفى الحدسى فيعتمد على فكرة الدحض Disproof ، أى أننا لا نقبل نفى قضية إلا إذا كان هناك دحض لها، أى برهان على كذبها. ولهذا فإن دحض دحض (أى نفى نفي) قضية ليس

بالضرورة إثباتاً لها، وهناك نتائج أخرى للمنطق الحدسى[1] سنتناولها فى عجالة أيضاً من خلال بعض الأمثلة التالية.

مثال (١١)

رأينا أثناء تحليل البرهان الخاص بالمثال رقم (٥) السابق أن القضية الكاذبة تتضمن أى قضية أخرى بشرط أن يكون ثابتها الرئيسى هو النفى. ونستطيع أن نحذف هذا الشرط حين تكون قاعدة النفى المزدوج بين القواعد التى يقبلها النسق : خذ المتتابعة الآتية على سبيل المثال :

$$\sim P \vdash P \rightarrow Q$$

البرهان

1	(1)	$\sim P$	Ass
2	(2)	P	Ass
3	(3)	$\sim Q$	Ass
1,2	(4)	Λ	(1),(2), $\sim$ E
1,2	(5)	$\sim\sim Q$	(3),(4), $\sim$ I
1,2	(6)	Q	(5), DN
1	(7)	$P \rightarrow Q$	(2), (6), $\rightarrow$ I

الفرق بين هذه المتتابعة، ومتتابعة المثال المشار إليه أن تالى النتيجة يمثل نقيض تالى النتيجة فى الأخرى. وهذا يعنى أن من الممكن اشتقاق أى قضية من القضية الكاذبة، ويعرف المبدأ الذى يحكم هذه النتيجة باللاتينية

---

(١) لا يتسع المقام هنا للبحث بصورة تفصيلية فى المنطق الحدسي، ولكننا نتعرض فقط للملامح العامة لما يذهب إليه الحدسيون فيما يخص حساب القضايا فقط. أما المذهب الحدسى والمنطق المرتبط به فموضوع يستحق دراسة منفصلة قد نعود إليها فيما بعد، وقد يقوم بها آخرون. ولمزيد من التفصيل فى المسائل التى نتعرض لها هنا، راجع

- Haack (1974), pp. 91 - 108.
- Dummett (1978), pp. 215 - 247.
- Newton-Smith (1985), pp. 210 - 13.

وباللغة العربية : - الفندى (١٩٦٩) ص ص ١٥٨ - ١٦٢ - السرياقوسى (١٩٩٣) ص ص

بإسم Ex Falso Quodlibet ، ويعني حرفياً : عن الكذب كل شئ يلزم. وهكذا نلاحظ أن قاعدة النفى المزدوج ضرورية لتأسيس هذا المبدأ الذى يقبله أصحاب المنطق الكلاسيكى جميعاً.(١) ويلاحظ أيضاً أن أصحاب المنطق الحدسى يقبلون هذا المبدأ، فى الوقت الذى يرفضون فيه قاعدة النفى المزدوج-وهنا تكمن مشكلتهم، التى تتمثل فى أن رفضهم لحذف النفى المزدوج يمنعهم من اشتقاق نتائج مقبولة أساساً لديهم. وسرعان ما يجدون حلاً لهذا المشكلة يقوم على اعتبار المبدأ نفسه ضمن قواعد النسق الحدسى. وبهذا يحذف الحدسيون من منطقهم قاعدة النفى المزدوج، ويضعون بدلاً منها القاعدة التالية :

$$\frac{X \vdash \Lambda}{X \vdash A}\ \text{EFQ}$$

وعلى هذا الأساس يمكن تعديل البرهان السابق ليتوافق مع القاعدة الحدسية المذكورة ويصير أكثر إختصاراً على الوجه التالى :

1	(1)	$\sim P$	Ass
2	(2)	P	Ass
1,2	(3)	Λ	(1),(2), $\sim$ E
1,2	(4)	Q	EFQ
1	(5)	$P \to Q$	(2), (4), $\to$ I

(١) هناك من يرفض مبدأ Ex Falso Quolibet لاعتبارات فلسفية هامة. أذكر منهم أستاذى د. ستيفن ريد S. L. Read فى إطار رفضه للمنطق الكلاسيكى عموماً،ولصالح منطق المناسبة Relevane logic الذى يتبناه فى دراساته المتعددة. وقد دار حوار بيننا حول رفضه لهذا المبدأ ولصنوه القائل بأن القضية الصادقة تلزم عن أى قضية أخرى الذى أشرنا إليه فى الفصل الأول من هذا الباب. وعموماً لا يتسع المقام هنا لبحث هذه المسألة بالتفصيل.

ننتقل الآن إلى مثال آخر ينطوى على استخدام قاعدة حذف النفى المزدوج مرتين، والسبب فى إيراده طرافة برهانه الذى يتطلب قدراً لا بأس به من الخيال لكى يتم اكتشافه، وكذلك اختلاف حالتى تطبيق حذف النفى المزدوج من حيث أن فى إحداها يمكن الوصول لنفس النتيجة عن طريق قاعدة "EFQ" المقبولة فى المنطق الحدسى، وفى الأخرى لا نستطيع أن نستعيض عنها بقاعدة حدسية أخرى مما يساهم فى توضيح الفرق بين المنطقين الكلاسيكى والحدسى.

مثال (١٢) : برهن على صحة المتتابعة التالية :[١]

$$(P \to Q) \to P \vdash P$$

البرهان :

1	(1)	$(P \to Q) \to P$	Ass
2	(2)	$\sim P$	Ass
3	(3)	P	Ass
4	(4)	$\sim Q$	Ass
2,3	(5)	Λ	(2),(3), ~ E
2,3	(6)	$\sim\sim Q$	(4),(5), ~ I
2,3	(7)	Q	(6), DN
2	(8)	$(P \to Q)$	(3),(7), → I
1,2	(9)	P	(1),(8), → E
1,2	(10)	Λ	(2),(9), ~ E
1	(11)	$\sim\sim P$	(2),(10), ~ I
1	(12)	P	(11), DN

(١) تجدر الإشارة إلى أن هذه المتتابعة ذات صلة قوية بمبرهنة بيرس المعروفة وهي :

$\vdash \{(P \to Q) \to P\} \to P$

والبرهان الذي نقيمه عليها هو نفس البرهان السابق بزيادة سطر واحد نطبق فيه تقديم التضمن. راجع في هذا الصدد الفصل الثالث من : أحمد أنور (١٩٨٣)

ينطوى البرهان على هذه المتتابعة على بعض عناصر الطرافة والإبداع، فالمقدمة التى نفترضها لا يظهر أنها تؤدى مباشرة إلى النتيجة، وهى "P" وحدها. الخطة الوحيدة المتاحة هنا هى إفتراض نفى "P" بهدف الوصول إلى تناقض ثم رفع الإفتراض الزائد،واشتقاق نفى نفى "P" من المقدمة (الإفتراض) الوحيدة للمتتابعة، ولكن هذا يبدو كما لو كان بعيد المنال حين ننظر إليه لأول وهلة.

والحيلة التى نلجأ إليها هى استخدام نفى "P" فى اشتقاق مقدمة التضمن الأول، أى إشتقاق "$P \rightarrow Q$"مما يعطينا "P" التى تتناقض مع الإفتراض الذى استخدمناه تواً، مما يؤدى إلى اشتقاق نفى نفى "P" من المقدمة "$(P \rightarrow Q) \rightarrow P$". وبتطبيق حذف النفى المزدوج نصل إلى"P". لاحظ أننا نطبق حذف النفى المزدوج مرتين فى هذا البرهان. وبالنسبة لقواعد المنطق الحدسى نلاحظ أن هذا البرهان غير مقبول لأنه يحتوى كما ذكرنا على إستخدامين مختلفين لقاعدة حذف النفى المزدوج. غير أن قاعدة "EFQ" التى التى أشرنا إليها تغنينا عن التطبيق الأول للنفى المزدوج، وهذا يمكننا من إشتقاق المتتابعة :

2,3 (?) Q

وبعبارة أخرى

$\sim P, P \vdash Q$

بالتطبيق المباشر لهذه القاعدة. ولكن لا يمكن الإستغناء عن حذف النفى المزدوج فى التطبيق الثانى فى السطر الثانى عشر. والسبب فى هذا

أننا نرفع إحدى المقدمات عند تطبيق تقديم النفى فى السطر الحادى عشر ولهذا نجد أن المنطق الحدسى يقبل المتتابعة :

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P \vdash \sim\sim P$$

ولا يقبل المتتابعة :

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P \vdash P$$

الفصل الرابع

التكافؤ والتلازم

الفصل الرابع
التكافؤ والتلازم

تناولنا فى الفصول الثلاثة السابقة من هذا الباب قواعد التقديم والحذف الخاصة بثوابت التضمن والوصل والفصل والنفى، فضلاً عن قاعدتين إضافيتين هما قاعدتا الإفتراض الحر و (حذف) النفى المزدوج. والسؤال الذى نحاول الإجابة عنه، ضمن أسئلة أخرى، فى هذا الفصل هو: هل نحن بحاجة إلى قواعد أخرى تخص ثوابت أخرى؟

بداية نقرر أن اللغة المنطقية التى قدمناها فى الباب الأول، وحددنا شروط صدق صيغها فى الباب الثانى تحتوى على ثابت واحد آخر هو ثابت التكافؤ. لهذا فالإجابة المباشرة هى أننا لا نزال بحاجة إلى قاعدتى تقديم وحذف لهذا الثابت. غير أن هناك من المناطقة من ينظر إلى التكافؤ بإعتباره ثابتاً تلخيصياً [1]، أى بإعتباره ثابتاً يلخص حقيقة وجود علاقة تضمنية متبادلة بين طرفين. وقد سبق أن قلنا إن التكافؤ التالى :

$$"P \leftrightarrow Q"$$

يعنى ببساطة أن : $(P \rightarrow Q) \,\&\, (Q \rightarrow P)$

ولهذا نجد لمون لا يقدم قواعد خاصة بثابت التكافؤ، ويستخدم بدلاً من ذلك أسلوب التعريف ، والواقع أن اعتماد هذا الأسلوب له ميزة، وهى أننا لا نضيف قاعدتين خاصتين بتقديم وحذف ثابت التكافؤ إلى مجموعة القواعد التى بلغت عشراً حتى الآن. ولاشك أن هذه ميزة هامة، لكن هناك جوانب أخرى للصورة فعدم وجود قاعدتين للتكافؤ- برغم إمكان حدوث ذلك بسهولة كما سنرى - يقتضى إضافة ثابت جديد إلى مفردات اللغة المنطقية ذلك أن

(1) Lemmon (1965), pp. 32 - 33.

التعريف يكون على الصورة:

$$"(P \leftrightarrow Q) =df (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)"$$

الثابت الذى يتوسط صيغة التكافؤ (على اليسار)، وصيغة وصل التضمنين المتبادلين (على اليمين) هو ثابت التعريف المألوف منذ كتاب البرنكبيا لرسل وهوايتهد على الأقل. والمشكلة لا تقتصر على كونه ثابتاً إضافياً. ولكنها تكمن أساساً فى أن شروط صدق هذا الثابت الجديد (فى نسقنا) تتطابق مع شروط صدق ثابت التكافؤ نفسه، مما يعنى الصدق الدائم للصيغة التالية:

$$"(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \{(P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P)\}"$$

غير أن وضع ثابت التكافؤ مكان ثابت التعريف يجعلنا نقع في دور منطقي لأننا نريد تعريف ثابت التكافؤ باستخدام التكافؤ. ومن ناحية أخرى لا نقبل وضع ثابتين مختلفين فى مقابل شروط صدق واحدة، مما يتناقض مع افتراض اختلافهما الذى بدأنا منه.

ا - قاعدتا التكافؤ:

الحل إذن يكمن فى وضع قاعدتين للتعامل إشتقاقياً مع ثابت التكافؤ كما هو الحال بالنسبة لبقية الثوابت، أى أن نضع قاعدة لتقديم التكافؤ Equivalence Introduction ، ونختصرها بالعلامة "I↔" وقاعدة أخرى لحذف التكافؤ Equivalence Elimination، ونرمز إليها بالرمز "E↔". القاعدة الأولى تحدد لنا شروط الإنتقال من مقدمات معينة إلى تكوين مركب ثابته الرئيسى هو التكافؤ، والثانية تحدد لنا شروط الإنتقال من مركب تكافؤى إلى صيغ أخرى.

نبدأ بقاعدة تقديم التكافؤ تنشأ علاقة التكافؤ بين صيغتين إذا توافر برهانان أحدهما على تضمن الأولى للثانية، والثانى على تضمن الثانية

للأولى، وهذا ما تعبر عنه الصيغة العامة التالية:

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \quad Y \vdash B \rightarrow A}{X, Y \vdash A \leftrightarrow B} \leftrightarrow I$$

ونظن أن وضوح هذه القاعدة فى غير حاجة إلى بيان، لأنها تقرر (تقريباً) ما يعبر عنه التعريف السابق، والذى رفضناه على أسس شكلية. يجب فقط ملاحظة أن إقامة التكافؤ يحتاج إلى وجود متتابعتين لهما سمة خاصة، كما أن المتتابعة ذات النتيجة التكافؤية تتكون مقدماتها من مجموع مقدمات المتتابعتين الأوليين. ننبه أيضاً إلى أن الترتيب غير ذى بال. (على عكس حذف التضمن)، بمعنى أن فى إمكاننا استنباط "$B \rightarrow A$" ، من نفس المقدمات بمجرد وضع المتتابعتين فوق الخط، كلاً مكان الآخر.

ننتقل الآن إلى تناول قاعدة حذف التكافؤ لنجد أنها قد تتخذ أكثر من صورة. يمكن أولاً أن تتخذ صورة أقرب ما تكون إلى عكس الصورة التى تتخذها القاعدة الأولى وتصبح فى هذه الحالة:

$$\frac{X \vdash A \leftrightarrow B}{X \vdash (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)} \leftrightarrow E$$

وهى تستند أيضاً إلى التعريف الذى قدمناه فى البداية. القاعدة صحيحة صورياً، ولكنها تؤدى إلى خطوات زائدة عند تطبيقها، وهذا ما يسهل رؤيته من خلال تأمل الأمثلة التالى بيانها فى هذا الفصل. وهناك طريقة أخرى للتعبير عن قاعدة حذف التكافؤ هى:

$$\frac{X \vdash A \leftrightarrow B}{X \vdash (A \rightarrow B)} \leftrightarrow E \qquad \frac{X \vdash A \leftrightarrow B}{X \vdash (A \rightarrow B)} \leftrightarrow E$$

القاعدة على هذا النحو لها صورتان، وإن حققت ميزة محددة وهى اختصار بعض الخطوات، حيث أننا فى أغلب الأحوال نحتاج إلى نصف التكافؤ فقط. وهو أحد التضمنين لكى نصل إلى نتائج معينة. ولعل هذا الإعتبار بالذات هو ما يدفعنا إلى تبنى تعريف سمبسون [1] للثابت الذى ينطوى على إختصار أكبر، وإن ظلت القاعدة على صورتين أيضاً هما :

$$\frac{X \vdash A \leftrightarrow B \quad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \leftrightarrow E \qquad \frac{X \vdash A \leftrightarrow B \quad Y \vdash B}{X, Y \vdash A} \leftrightarrow E$$

وفضلاً عن الإختصار الذى يتحقق فى عدد سطور البرهان، نجد أن القاعدة واضحة وضوحاً لا مجال للشك فيه. ذلك أن الصورتين تقولان ببساطة شديدة، إنه إذا تكافأت قضيتان بناء على مقدمات معينة ، وكان لدينا برهان على إحداهما أصبح فى إمكاننا الإنتقال إلى إثبات الأخرى فى متتابعة مقدماتها هى مجموع مقدمات المتتابعتين الأوليين. وبديهى أن وجود صورتين للقاعدة يعنى أن فكرة الترتيب لا تلعب دوراً فى ثابت التكافؤ، كما هو الحال فى ثابت التضمن الذى تشبه صورته العامة إحدى صورتى التكافؤ (الأولى بالتحديد). والآن ننتقل إلى بعض الأمثلة التى نوضح بها كيفية توظيف قاعدتى التكافؤ فى البراهين المختلفة.

---

(1) Simpson, R. (1988), p. 57.

مثال (أ) : استخدام قواعد الاستنباط الطبيعى فى البرهان على ما يلى:

$$(P \vee Q) \leftrightarrow P \vdash Q \rightarrow P$$

البرهان

1	(1)	$(P \vee Q) \leftrightarrow P$	Ass
2	(2)	Q	Ass
2	(3)	$(P \vee Q)$	(2), vI
1,2	(4)	P	(1), (30, ↔E
1	(5)	$(Q \rightarrow P)$	(2), (4), →I

فى السطر الأول افترضنا التكافؤ، وفى الثانى افترضنا مقدم النتيجة، أى القضية "Q" ، يلاحظ أن "P" المطلوب البرهان عليها من (١)، و (٢) هى أحد طرفى التكافؤ فتكون الفكرة هى اشتقاق الطرف الأول من التكافؤ على حدة، أي (P v Q)، ثم تطبيق قاعدة حذف التكافؤ.

يبدأ تنفيذ هذا المخطط البرهانى فى السطر الثالث بتقديم الفصل على الصيغة "Q"، لتصل إلى طرف التكافؤ الأول، ثم نطبق قاعدة حذف التكافؤ بصورتها الأخيرة لكى نصل إلى "P" من (1)، و (2) ، ثم نتخلص من (2) بتقديم التضمن لنصل إلى المتتابعة المطلوبة فى السطر الخامس فقط.

نؤكد أنه لو اخترنا تطبيق أى من الصورتين الأخريين لقاعدة حذف التكافؤ لاستلزم ذلك زيادة خطوات البرهان خطوتين على الأقل. وهو ما لسنا بحاجة إليه ما دامت القواعد صحيحة وواضحة من خلال العلاقة المتفق على قيامها بين التكافؤ والتضمن.

مثال (٣): برهن على ما يلى باستخدام قواعد الاشتقاق:-

$P \leftrightarrow R, P \vee R \vdash P \& R$

البرهان:

1	(1)	$P \leftrightarrow R$	Ass
2	(2)	$P \vee R$	Ass
3	(3)	P	Ass
1,3	(4)	R	(1),(3), $\leftrightarrow$E
1,3	(5)	P & R	(3),(4), &I
6	(6)	R	Ass
1,6	(7)	P	(1),(6), $\leftrightarrow$E
1,6	(8)	P & R	(6),(7), &I
1,2	(9)	P & R	(2),(3),(5),(6),(8),vE

تقول المتابعة إنه إذا تكافأت قضيتان، وصدقت علاقة الفصل بينهما كان هذا كافياً لصدق وصل القضيتين. ونستطيع أن نرى هذا الأمر بوضوح من الزاوية الدلالية عندما نعلم أن قيام علاقة الفصل يضمن صدق أحد الطرفين على الأقل ، والتكافؤ من ناحية، يضمن تطابق قيمتى الصدق الخاصتين بهما، مما يعنى صدقهما معاً، أى صدق علاقة الوصل كما نجد هذا جلياً فى النتيجة.

أما عن البرهان فالإستراتيجية البرهانية تعتمد على المزاوجة بين قاعدتى حذف الفصل وحذف التكافؤ، وانطوى هذا على الوصول إلى النتيجة "P & R" مرة من "P" بالاشتراك مع "$P \leftrightarrow R$" بحذف التكافؤ، وعلى الوصول لنفس النتيجة مرة أخرى من "R" بالإشتراك مع السطر الأول نفسه بتطبيق القاعدة نفسها. والسطر الأخير عبارة عن تطبيق لقاعدة حذف الفصل بعد اكتمال العناصر الضرورية لها.

ويلاحظ أننا لم نطبق قاعدة تقديم الوصل كإستراتيجية أساسية بسبب عقبة المقدمة الفصلية فى السطر الثانى ، ولذلك طبقنا تقديم الوصل كتكتيك أو خطة فرعية مرتين مختلفتين، فى السطرين الخامس والثامن. والدرس المستفاد يتمثل فى أن الخطط البرهانية ليست قوالب جامدة، ولا يتم تطبيقها بصورة آلية على الإطلاق. المهم أن النسق الذى بين أيدينا يوفر لنا المرونة الكافية لاستخدام بدائل مختلفة لخطط مختلفة توصلنا فى النهاية إلى الهدف البرهانى الذى ننشده.

مثال (٣): برهن على أن علاقة التكافؤ متعدية Transitive ، أى على صحة المتتابعة التالية:

$$P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$$

البرهان:

1	(1)	$P \leftrightarrow Q$	Ass
2	(2)	$Q \leftrightarrow R$	Ass
3	(3)	P	Ass
1,3	(4)	Q	(1),(3), $\leftrightarrow$E
1,2,3	(5)	R	(2),(4), $\leftrightarrow$E
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	(3),(5), $\leftrightarrow$I
7	(7)	R	Ass
2,7	(8)	Q	(2),(7), $\leftrightarrow$E
1,2,3	(9)	P	(1),(8), $\leftrightarrow$E
1,2	(10)	$R \rightarrow P$	(7),(9), $\leftrightarrow$I
1,2	(11)	$P \leftrightarrow R$	(6),(10), $\leftrightarrow$I

تقول المتتابعة، كما أشرنا فى البداية، إن علاقة التكافؤ متعدية، أى أنه إذا تكافأت صيغتان، وتكافأت إحداهما مع صيغة ثالثة كانت الأخرى مكافئة للأخيرة. والتكافؤ يشبه التضمن فى هذه الخاصية، وهذا ما أوضحناه فى الفصل الأول من هذا الباب. وتجدر الإشارة إلى أن الوصل والفصل لا يتسمان بهذه السمة.

أما عن البرهان وخطواته فواضح من عناصر المتتابعة أننا سنحتاج إلى تطبيق حذف التكافؤ لأن لدينا مقدمتين تكافؤيتين . وواضح أيضاً أننا سنحتاج إلى تطبيق قاعدة تقديم التكافؤ لأن النتيجة نفسها عبارة عن صيغة تكافؤ.

وتنقسم بنية البرهان إلى جزئين رئيسيين. يبدأ الجزء الأول بعد وضع المقدمتين، ويستغرق السطور من "(3)" إلى"(6)" ، وفيه نبرهن على نصف التكافؤ الأول، أى على تضمن الطرف الأول فى النتيجة للثانى. أما الجزء الثانى من البرهان فيستغرق السطور من "(7)" إلى "(10)" ، وفيه نبرهن على نصف التكافؤ الثانى، أى على تضمن الطرف الثانى للأول. وأما عن التكتيك الداخلي للبرهان على كل جزء فمباشر تماماً، ولا ينطوي على أى تحوير. وهو يتمثل في الحالتين في تطبيق قاعدة تقديم التضمن بعد تقديم افتراض وحذف تكافؤ. أما السطر الأخير فنلخص فيه عملنا بتطبيق قاعدة تقديم التكافؤ لاشتقاق النتيجة المطلوبة من مقدمتيها .

مثال (٤) : برهن على صحة ما يلى

$$\sim Q \vdash (P \vee Q) \leftrightarrow P$$

البرهان :

1	(1)	~ Q	Ass
2	(2)	P v Q	Ass
3	(3)	~ P	Ass
4	(4)	P	Ass
3,4	(5)	Λ	(3),(4), ~E
6	(6)	Q	Ass
1,6	(7)	Λ	(1),(6), ~E
1,2,3	(8)	Λ	(2),(4),(5),(6),(7),vE
1,2	(9)	~ ~ P	(3),(8) ~I
1,2	(10)	P	(9),DN
1	(11)	(P v Q) → P	(2),(10), →I
12	(12)	P	Ass
12	(13)	PvQ	(12), vI
	(14)	P → (P v Q)	(12),(13), →I
1	(15)	(P v Q) ↔ P	(11),(14), ↔I

بعد الخطوة التقليدية الأولى التى نفترض فيها مقدمة المتابعة نجد أن النتيجة تكافؤية، وهذا يعنى أن خطتنا البرهانية يجب أن تنقسم إلى مرحلتين : الأولى هى إثبات تضمن طرف التكافؤ الأول للثانى (وقد استغرق هذا السطور من الثالث حتى الحادى عشر)، والمرحلة الثانية هى إثبات تضمن طرف التكافؤ الثانى للطرف الأول، وهذ يشغل السطور الثلاثة من الثانى عشر حتى الرابع عشر. والسطر الأخير من البرهان يمثل التطبيق التلقائى لقاعدة تقديم التكافؤ حسبما تقضى الخطة العامة للبرهان.

ويمكن النظر إلى كل مرحلة من مراحل البرهان باعتبارها برهاناً مستقلاً على متتابعة مستقلة، فالمرحلة الأولى (من 3 إلى 11) برهان على إحدى صور المتتابعة المعروفة منذ القرون الوسطى باسم Modus Tollendo Ponens، كما أشرنا إلى ذلك فى الفصل قبل السابق، بل إن المبدأ يطابق تماماً السطر العاشر من البرهان الذى نحن بصدده الآن. ولذا لا نشعر بحاجة إلى تكرار شرح الخطوات مرة أخرى.

أما المرحلة الثانية من البرهان فتبدأ بافتراض"P"، وهو مقدم التضمن المطلوب إقامته، لنصل منه سريعاً بتقديم الفصل لتركيب التالى، ثم تقديم التضمن (رفع "P") واستكمال طرف التكافؤ المطلوب، والخطوة الأخيرة تلخيص لعملنا فى السطور الأربعة عشر السابقة عليها.

مثال (٥) : برهن على ما يلى :

$$P \leftrightarrow \sim Q \vdash \sim P \leftrightarrow Q$$

البرهان

1	(1)	$P \leftrightarrow \sim Q$	Ass
2	(2)	$\sim P$	Ass
3	(3)	$\sim Q$	Ass
1,3	(4)	P	(1),(3), $\leftrightarrow$E
1,2,3	(5)	Λ	(2),(4), ~E
1,2	(6)	$\sim\sim Q$	(3),(5), ~I
1,2	(7)	Q	(6), DN
1	(8)	$\sim P \rightarrow Q$	(2), (7), $\rightarrow$I
9	(9)	Q	Ass
10	(10)	P	Ass
1,10	(11)	$\sim Q$	(1),(10), $\leftrightarrow$E
1,9,10	(12)	Λ	(9),(11), ~E
1,9	(13)	$\sim P$	(10),(12), ~I
1	(14)	$Q \rightarrow \sim P$	(9),(13), $\rightarrow$I
1	(15)	$\sim P \leftrightarrow Q$	(8),(14), $\leftrightarrow$I

تقول المتابعة إنه إذا تكافأت قضية مع نفى أخرى ، قام تكافؤ بين نفى الأولى والقضية الثانية ، ولا شك أن المراجعة السريعة لشروط صدق التكافؤ توضح صحة هذه المتابعة دون عناء.

أما البرهان، والذى نوضح به صحة المتابعة من الزاوية الاشتقاقية، فيبدو طويلاً بعض الشئ، وإن لم يكن هذا دليلاً على صعوبة من أى نوع. فلإثبات تكافؤ، كما نعلم، نثبت تضمنين متقابلين، ثم نقوم بتقديم التكافؤ فى السطر الأخير من البرهان.

ولأن المقدمة التى ننطلق منها قضية تكافؤ هى الأخرى، فالخطوات الداخلية فى كل مرحلة تعتمد أساساً على حذف التكافؤ. غير أن الخطة الداخلية في المرحلتين تعتمد على حذف النفى وتقديمه بعد تقديم افتراض زائد، لتنتهى كل مرحلة بتقديم التضمن. المرحلة الأولى تستغرق السطور من الثانى حتى الثامن، والمرحلة الثانية تستغرق السطور من التاسع حتى الرابع عشر. ويتوج البرهان باستخدام قاعدة تقديم التكافؤ فى السطر الأخير.

٣- التلازم:

سبقت الإشارة إلى أن اللزوم هو العلاقة الإستنباطية الأساسية التى يهتم المنطق الصورى باكتشاف قوانينها العامة. وينطبق هذا الوصف على المدارس المنطقية المختلفة، سواء منها الاتجاهات التقليدية أو الاتجاهات الكلاسيكية الحديثة. وقد أفضنا فى الحديث عن نوعين من اللزوم :أحدهما هو اللزوم الدلالى ، وهو موضوع الباب الثانى عموماً، والفصل الثانى منه على وجه خاص. أما النوع الثانى من اللزوم فهو اللزوم التركيبى، أو الاشتقاقى الذى نهتم به فى الباب الحالى.

أما التلازم فلا يخرج عن كونه لزوماً متبادلاً. إذا وفقط إذا قامت علاقة تلازم صحيحة بين صيغتين، فإن كلا منهما تلزم عن الأخرى لزوماً صحيحاً. ولما كان موضوع اللزوم مرتبطاً بالتضمن، فمن الطبيعى أن نتناول التلازم بمناسبة البحث فى قواعد ثابت التكافؤ، ذلك أن العلاقة بين التضمن والتكافؤ تتناظر تماماً مع العلاقة بين اللزوم والتلازم.

وليس معنى هذا أننا سنضع قواعد جديدة لصحة قيام التلازم بين صيغتين تختلف عن شروط صحة اللزوم. فما دام التلازم لزوماً متبادلاً كان مفهوم الصحة سواء الدلالية أو الاشتقاقية الذى يعنينا هنا بالدرجة الأولى مرتبطاً بهذا الأمر تماماً . فالتلازم بين صيغتين يكون صحيحاً (تركيبياً) إذا أمكن اشتقاق أى من الطرفين على أساس افتراض الطرف الآخر فقط. والبرهان هنا ينقسم دائماً إلى قسمين: برهان من الصيغة الأولى إلى الثانية، وبرهان من الثانية إلى الأولى ، وينطبق على كل منهما نفس شروط البرهان التى ندرسها فى هذا الباب.

يبقى أن نشير إلى فارق شكلى محدد، وهو أن التلازم لا يقوم إلا بين صيغتين فقط، أما اللزوم فقد يقع بين مجموعة من الصيغ هى دائماً المقدمات، وصيغة أخرى هى النتيجة. وليس لهذا الفارق من أهمية نسقية تذكر ننتقل الآن إلى تناول بعض الأمثلة التى نوضح بها كيفية البرهان على تلازم صيغتين منطقيتين.

مثال (٦) : برهن على صحة ما يلى:

$$P \& Q \dashv\vdash \sim(\sim P \vee \sim Q)$$

البرهان :

1	(1)	P & Q	Ass
1	(2)	P	(1), &E
1	(3)	Q	(1), &E
4	(4)	~ P v ~ Q	Ass
5	(5)	~ P	Ass
1,5	(6)	Λ	(2),(5), ~E
7	(7)	~ Q	Ass
1,7	(8)	Λ	(3),(7), ~E
1,4	(9)	Λ	(4),(5),(6),(7),(8), vE
1	(10)	~ (~ P v ~ Q)	(4),(9), ~I
11	(11)	~ (~ P v ~ Q)	Ass
12	(12)	~ P	Ass
12	(13)	(~ P v ~ Q)	(12), vI
11,12	(14)	Λ	(11),(13), ~E
11	(15)	~ ~ P	(12),(14), ~I
11	(16)	P	(15), DN
17	(17)	~ Q	Ass
17	(18)	(~ P v ~ Q)	(17), vI
11,17	(19)	Λ	(11),(18), ~E
11	(20)	~ ~ Q	(17),(19), ~I
11	(21)	Q	(20), DN
11	(22)	P & Q	(16,(21), &I

يجب ألا نفاجأ بطول البرهان، فهذا شأن محاولة إثبات تلازم صيغتين لأننا فى الواقع بصدد برهانين مختلفين. الأول لإثبات متتابعة معينة (السطور من الأول إلى العاشر). أما البرهان الثانى فهو إثبات لمتتابعة مقدمتها هى نتيجة الأولى، ونتيجتها هى مقدمة الأولى (وهو يشغل السطور من الحادى عشر إلى الثانى والعشرين).

البرهان الأول، أو بالأحرى الشق الأول من البرهان على التلازم يعتمد على إستراتيجية محددة، وهى محاولة اشتقاق تناقض من افتراض نقيض النتيجة مأخوذاً مع المقدمة الوحيدة، وهذا توصلنا إليه فى الخطوة التاسعة من البرهان. ولكى نصل إلى هذا التناقض اعتمدنا على قاعدة حذف الفصل كخطة جزئية، وهذا مفهوم. ذلك أننا نستخدم افتراضاً فصلياً (السطر الثانى) فى اشتقاق هذا التناقض.

أما الشق الثانى من البرهان فالخطة العامة فيه تقوم على تقديم الوصل، ويعود هذا إلى أن النتيجة المطلوب اشتقاقها مركب وصلى. وعلى هذا الأساس حاولنا البرهنة على طرفى الوصل كلا على حدة، فوصلنا إلى إثبات "P" فى الخطوة السادسة عشر ، وإلى إثبات"Q" فى الخطوة الحادية والعشرين. ولعلنا نلاحظ ضرورة استخدام قاعدة النفى المزدوج فى البرهان على هذا الشق دون الأول. وهذا يعنى أن الشق الثانى من التلازم مرفوض بمعايير المنطق الحدسى الذى أشرنا إليه فى الفصل السابق.

مثال (٧) : برهن على صحة التلازم التالى:

$$\sim P \,\&\, Q) \dashv\vdash \sim P \vee \sim Q$$

البرهان :

1	(1)	~ (P & Q)	Ass
2	(2)	P	Ass
3	(3)	Q	Ass
2,3	(4)	(P & Q)	(2),(3), &I
1,2,3	(5)	Λ	(1),(4), ~E
1,2	(6)	~ Q	(3),(5), ~I
1,2	(7)	~ P v ~ Q	(6), vI
8	(8)	~ (~ P v ~ Q)	Ass
1,2,8	(9)	Λ	(7),(8), ~E
1,8	(10)	~ P	(2),(9), ~I
1,8	(11)	(~ P v ~ Q)	(10), vI
1,8	(12)	Λ	(8),(11), ~E
1	(13)	~ ~(~ P v ~ Q)	(8),(12), ~I
1	(14)	~ P v ~ Q	(13), DN
15	(15)	~ P v ~ Q	Ass
16	(16)	P & Q	Ass
16	(17)	P	(16), &E
16	(18)	Q	(16), &E
19	(19)	~ P	Ass
16,19	(20)	Λ	(17),(19), ~E
21	(21)	~ Q	Ass
16,21	(22)	Λ	(18),(21), ~E
15,16	(23)	Λ	(15),(19),(20),(21),(22), vE
15	(24)	~ (P & Q)	(16),(23), ~I

سنتناول فى تعليقنا السريع شقى التلازم كلا على حدة. الشق الأول من البرهان غير نمطى كما نرى. فبعد وضع المقدمة الوحيدة كافتراض ، ننتقل إلى النتيجة لنجد أنها فصل بين نفيين لطرفى الوصل المنفى الذى يمثل المقدمة. وعادة ما نهدف فى البرهان على فصل إلى اشتقاق أحد الطرفين فقط، ثم ننتقل إلى المطلوب بتطبيق قاعدة تقديم الفصل كما فعلنا مراراً.

ولأن طرفى الفصل المنشود منفيان فسنعتمد فى خطتنا الجزئية على قاعدتى حذف وتقديم النفى. والمشكلة التى تواجهنا هى أن اشتقاق التناقض (أو حذف النفى) يتطلب تركيب وصل من"P"، و"Q". والاختيار الأفضل فى هذه الحالة هو افتراض كل منهما على حدة، واشتقاق الوصل، بدلاً من افتراضه، من ناحية لأننا لا نريده، ومن ناحية أخرى لأننا سنستفيد من كلا الافتراضين على حدة.

وبيان ذلك أننا اشتققنا التناقض لأول مرة فى السطر الخامس لنقوم برفع "Q"، واشتقاق نفيها من الإفتراضين الأول والثانى. ولعل فى هذا بداية لاكتشاف السبيل لإكمال البرهان بإحداث تحول فى الإستراتيجية فتصبح تقديم النفى بدلاً من تقديم الفصل، ولهذا افترضنا نفى النتيجة (فى السطر الثامن) بعد اشتقاق نفيها فى السطر السابع.

هذا يؤدى بنا إلى اشتقاق "P ~" من الافتراضين الأول والثامن، لنعيد اشتقاق نقيض الافتراض الثامن مرة أخرى، واشتقاق التناقض للمرة الثالثة فى السطر الثانى عشر بين الافتراضين الباقيين ("1" و "8"). بعد ذلك نرفع الافتراض الثامن بتقديم النفى، ثم نستخدم النفى المزدوج كضرورة لإشتقاق النتيجة المطلوبة فى السطر الرابع عشر.

أما الشق الثانى من البرهان، والذى يغطى السطور من الخامس عشر حتى الرابع والعشرين فلا تعليق لنا عليه سوى أنه تكرار شبه حرفى لبرهان

سابق. والبرهان المقصود هو الشق الأول من البرهان على المثال السابق مباشرة. والفارق الجوهرى الوحيد لا يظهر إلا فى الخطوة الأخيرة من كل برهان، وذلك حين نصل إلى اشتقاق التناقض من مقدمتين هما:

(P & Q) , (~ P v ~ Q)

فى المثال رقم (٦) اشتققنا نفى الفصل من الوصل بتطبيق قاعدة تقديم النفى، وفى المثال رقم (٧) اشتققنا نفى الوصل من الفصل بتطبيق نفس القاعدة.

مثال (٨) : برهن على صحة التلازم التالى باستخدام قواعد الاستنباط الطبيعى.

P v Q ⊣⊢ ~ (P & ~ Q)

البرهان :

1	(1)	P v Q	Ass
2	(2)	~ P & ~ Q	Ass
2	(3)	~ P	(2), &E
2	(4)	~ Q	(2), &E
5	(5)	P	Ass
2,5	(6)	Λ	(3), (2), ~E
7	(7)	Q	Ass
2,7	(8)	Λ	(4), (7), ~E
1,2	(9)	Λ	(1),(5),(6),(7),(8), vE
1	(10)	~ (~P & ~ Q)	(2),(9), ~I
11	(11)	~ (~P & ~ Q)	Ass
12	(12)	~ (P v Q)	Ass
13	(13)	P	Ass
13	(14)	P v Q	(13), vI

12,13	(15)	Λ	(12),(14), ~E
12	(16)	~ P	(13),(15), ~I
17	(17)	Q	Ass
17	(18)	P v Q	(17), vI
12,17	(19)	Λ	(12),(18), ~E
12	(20)	~ Q	(17),(19), ~I
12	(21)	(~ P & ~ Q)	(16),(20), &I
11,12	(22)	Λ	(11),(21), ~E
11	(23)	~ ~ (P v Q)	(12),(22), ~I
11	(24)	P v Q	(23), DN

الشق الأول من البرهان يعتمد بالدرجة الأولى على تضافر قاعدتى النفى وحذف الفصل، من زاوية أن القاعدة الأولى هى الإستراتيجية العامة، والثانية ضرورية جوهرياً لاشتقاق التناقض المطلوب من الافتراض الثانى. وقد تم اشتقاق التناقض فى السطر التاسع بعد اشتقاقه مرتين مختلفتين من طرفى الفصل (الذى يتمثل فى الافتراض الأول). وهذا يمهد الطريق لتطبيق قاعدة تقديم النفى فى السطر العاشر.

أما الشق الثانى من اللزوم فبرهانه ينطوى على درجة أكبر من التعقيد، والسبب فى ذلك أن المطلوب هو اشتقاق الفصل "P v Q" من نفى وصل نفى طرفيه، أى من" (P & ~ Q) ~"، ولذلك نستبعد محاولة اشتقاق أحد طرفى هذا الفصل وتطبيق تقديم الفصل كإستراتيجية للبرهان لأنها محاولة محكوم عليها بالفشل. ولذلك نفترض نفى النتيجة الفصلية ، ونحاول الوصول منها بالاشتراك مع الافتراض الأول إلى تناقض لكى نرفعها ونشتق نفيها منه.

ونحن لا نستطيع اشتقاق تناقض مباشر بين الافتراضين الأول والثانى كما نرى، ولذلك نلجأ إلى محاولة اشتقاق نتيجة من أحدهما تتناقض مع الأول. والأوفق فى هذه الحالة أن يتم ذلك مع الافتراض الثانى. فافتراض "P" سريعاً ما يوصلنا إلى تناقض مع "(P v Q)" ، لنشتق نفى"P" منه ، وهذا في السطر السادس عشر. ونفعل نفس الشئ بالنسبة للصيغة "Q" لنصل إلى اشتقاق نفيها من نفس الافتراض. فى السطر الحادى والعشرين نطبق قاعدة تقديم الفصل لنشتق وصل نفى كل من "P"، و "Q" من الافتراض الثانى. وهذا هو نقيض الافتراض الأول، ونعلن هذا التناقض فى السطر الثانى والعشرين، لنشتق نفى نفي الفصل من وصل نفى المتغير "P"، و "Q" فى السطر قبل الأخير. بعد ذلك نحتاج إلى قاعدة (حذف) النفى المزدوج لنصل إلى البرهان على الشق الثانى من التلازم فى السطر الرابع والعشرين.

ونشير هنا إلى أن هناك تلازم مرتبط بالتلازم الذى استعرضنا برهانه تواً ، وهو ما ينص على:

$$\sim (P \vee Q) \dashv\vdash \sim P \ \& \sim Q$$

غير أننا لن نتناول برهانه هنا لسبب بسيط، وهو أن الشق الأول منه سبق البرهان عليه فى المثال رقم (٦) من الفصل السابق، باعتباره متتابعة منفصلة، وهذا بالطبع لا يؤثر على طبيعة الأمر فى شئ من قريب أو بعيد. أما الشق الثانى وهو المتتابعة من وصل نفى طرفين إلى نفى فصلهما فيكاد يتطابق مع البرهان على الشق الأول من التلازم الذى استعرضناه فى المثال السابق مباشرة. والخلاف الوحيد فى السطر الأخير (العاشر) حيث نرفع

الافتراض الأول بدلاً من الثانى ونشتق نفيه منه. وهذه الحالة تشبه الحالة الخاصة بشقين مختلفين من المثالين الخامس والسادس السابقين.

يبقى أن نشير إلى أن مجموعة الأمثلة التى تناولناها فى هذا القسم تشكل معاً ما يعرف بقوانين دى مورجان [1] مطبقة على حساب القضايا. ولعلنا نلاحظ أيضاً أن بعضها مرفوض فى حساب القضايا الحدسى، وهى المجموعة التى نحتاج فى البرهان عليها إلى تطبيق قاعدة (حذف) النفى المزدوج.

٣- قواعد إضافية:

اكتمل الآن البناء النسقى لنظرية البرهان الخاصة بحساب القضايا طبقاً لنظرية الاستنباط الطبيعى، ونستطيع أن نطمئن إلى أن القواعد الإثنتى عشرة التى عرضناها تكفى للبرهان على أى متتابعة تقع فى نطاق النظرية بشرط أن تكون صحيحة بالمعايير الدلالية.[2] غير أننا نفرد القسم الحالى لاستعراض قاعدتين إضافيتين، بمعنى أن من الممكن من حيث المبدأ أن تستغنى عنهما، ولكن الفائدة التى نجنيها منهما، والتى تتمثل فى

---

(١) أغسطس دى مورجان De Morgan (١٨٠٦ – ١٨٧٨) واحد من كبار المناطقة الإنجليز، وله اسهامات متنوعة فى المنطق والرياضيات، ومنها إنشاؤه لمنطق العلاقات، وابتكاره لمفهوم عالم المقال Universe of Discourse، فضلاً عن القوانين التى ندرسها فى هذا القسم. ومن أهم كتاباته دراسته الهامة بعنوان "Formal Logic" ، الذى صدر عام ١٨٤٧، ولمزيد من الاطلاع حول هذا المنطقى، ومكانته فى تاريخ المنطق راجع :

١- د. محمود زيدان (١٩٧٩) ، ص ص ٦٥ – ٧٢.

2- Lewis, C. I. (1960), pp. 37 - 51.

(٢) هذا الاطمئنان يستند إلى البرهان المعروف ببرهان الإكتمال Completeness Proof الخاص بحساب القضايا.

اختصارهما الواضح للعديد من البراهين، يجعل من المرغوب فيه إضافتهما إلى جملة قواعد النسق. القاعدة الأولى هى قاعدة التبديل، والثانية هى قاعدة تقديم المتتابعات(والمبرهنات).

أ- قاعدة التبديل

دعنا نتفق على صحة المتتابعة التالية (وهى صحيحة بالفعل)،

$$(P \rightarrow Q) \vdash \sim (Q \rightarrow \sim P)$$

ومن ناحية أخرى علينا أن نحاول البرهان على صحة متتابعة قريبة الشبه منها هى:

$$(P \rightarrow R) \vdash \sim (R \rightarrow \sim P)$$

ولعلنا قد لاحظنا بالفعل أن الفارق الوحيد بين المتتابعتين هو أنه فى مقابل المتغير "Q" فى المتتابعة الأولى يوجد المتغير "R" فى المتتابعة الثانية، وهذا فى كل مرة يرد فيها المتغير، وليس فى بعضها فقط. ونقول فى هذه الحالة إن المتتابعة الثانية صحيحة مثل المتتابعة الأولى بتطبيق قاعدة التبديل Substitution Rule (١) هذا مثال بسيط ومباشر لتطبيق هذه القاعدة التى لم تحدد معناها الضبط بعد، وأفضل وسيلة لتحقيق ذلك هى أن نقدم مجموعة من المتتابعات المرتبطة بالمتتابعة الأولى، ونرى هل تنطوى على تطبيق صحيح لقاعدة التبديل؟ أم لا؟ المتتابعات هى

---

(١) يشير ألونزو تشيرش إلى أن قاعدة التبديل الضرورية لنسق المنطق، وخاصة بالنسبة لمنطق القضايا، لم تظهر إلا فى كتابات فريجه المتأخرة نسبياً. أما رسل فقد تباين موقفه منها بين القبول والرفض إلى أن استقر فى النهاية على الموقف الصحيح، وهو الإقرار بهذه القاعدة التلخيصية الهامة. لمزيد من التفصيل حول هذه النقطة راجع :

Church, A. (1956), pp. 157 - 8.

$$(Q \rightarrow P) \vdash \sim (P \rightarrow \sim Q)$$
$$(Q \rightarrow Q) \vdash (\sim Q \rightarrow \sim Q)$$
$$R \rightarrow (P \& Q) \vdash \sim (P \& Q) \rightarrow \sim R$$

المتتابعات الثلاث كلها صحيحة ، وذلك نظراً إلى أنها جميعاً تطبيقات صحيحة لقاعدة التبديل (S). فالمتتابعة الأولى نستبدل فيها المتغير "Q" بالمتغير"P"، وكذلك نستبدل المتغير"P" بالمتغير "Q". أما في المتتابعة الثانية فتقوم بالاستبدال الأول فقط، وهي صحيحة أيضاً لأنه لا مانع من أن يكون المتغير الذى نضعه مكان المتغير الذى نرفعه هو أحد المتغيرات الواردة بالمتتابعة نفسها.

أما المتتابعة الثالثة فقد أبدلنا المتغير "Q"، ووضعنا بدلاً منه صيغة هى "(P&Q)"، وهذا أمر لا غبار عليه. أما إذا حاولنا أن نفعل العكس، أى أن نجرى التبديل على صيغة، ونضع مكانها صيغة أخرى، لكان الإجراء غير سليم منطقياً.

والآن نلخص القاعدة بأنها تتيح لنا الإنتقال من متتابعة (أو مبرهنة) عن طريق تبديل أحد أو بعض أو كل متغيراتها، كل متغير نضع مكانه متغير أو صيغة، وبشرط أن يكون التبديل شاملاً لكل المرات التى يرد فيها المتغير (أو المتغيرات) الذى أجرى عليه التبديل.

مثال (٩): برهن على ما يلي:

$$(R \& S) \leftrightarrow \sim (P \& R), \sim (P \& R) \vdash (R \& S)$$

البرهان :

(1)	$P \leftrightarrow Q \vdash P \leftrightarrow Q$	Ass
(2)	$Q \vdash Q$	Ass
(3)	$P \leftrightarrow Q, Q \vdash P$	(1),(2), $\leftrightarrow$ E
(4)	$(R \& S) \leftrightarrow \sim(P \& R), \sim(P \& R) \vdash (R \& S)$	(3), S.

بدأنا بالبرهان على متتابعة مألوفة فى السطور الثلاثة الأولى ، وفى السطر الرابع طبقنا قاعدة التبديل فوضعنا "(R & S)" مكان المتغير "P" والصيغة "(P & R) ~" مكان المتغير "Q"، وبذا نجد أننا صممنا برهاناً بسيطاً وواضحاً لمتتابعة ربما تبدو فى بعض الأمثلة على درجة كبيرة من الصعوبة.

نشير هنا فقط إلى أن البرهان مصاغ بالطريقة المطولة التى استخدمناها فى عرض البرهان الأول فى الفصل الأول من هذا الباب، ثم استبعدناها لصالح الطريقة المختصرة فى بقية الفصول. إن هذه العودة لا تعنى إلا توضيح قاعدة التبديل، فإذا استخدمنا الطريقة المألوفة فى إعادة صياغة نفس البرهان لن يؤدى هذا إلى أى تعديل.

أما النقطة الهامة التى نود الإشارة إليها قبل أن ننتقل إلى الحديث عن قاعدة أخرى فتتمثل فى أن قاعدة التبديل لا تنطبق على ثابت التناقض (1)، والسبب فى هذا ببساطة أن التناقض ليس متغيراً، ولكنه ثابت. هذا وإن كنا نلاحظ أن يسلك سلوكاً يشبه المتغير، كما سبق وأن أشرنا. أما مصدر رفضنا لتطبيق قاعدة التبديل على التناقض هو أن تطبيقها يؤدى إلى تغيير قيمة صدق الصيغة التى يرد فيها. خذ مثلاً الصيغة:

"$P \to \Lambda$"

إذا حاولنا وضع متغير أو صيغة مكان ثابت التناقض فقد نحصل على قائمة صدق مختلفة عن تلك التى تعبر عنها الصيغة، ومنها مثلاً:

"$P \to Q$"

---

(1)Van Dalen, D. (1989), p. 18.

واضح لنا أن هاتين الصيغتين غير متكافئتين، فإذا كانت الصيغة الأولى جزءاً من متتابعة معينة فإن تغير شروط صدقهما يؤثر على صحة المتتابعة كما نعلم. إننا هنا نعيد التأكيد على أن ثابت التناقض يعامل كصيغة بسيطة، أو هو صيغة بسيطة، وليس متغيراً ، وهذا يجعل قاعدتنا الخاصة بالتبديل صحيحة لأنها لا تنطبق عليه أساساً.

ب- تقديم المتتابعات

المنطق المعاصر نسق متآزر. يصدق هذا بين نظرياته، ويصدق أيضاً داخل كل نظرية على حدة. فالمبرهنات والمتتابعات تتكاتف، ويؤدى بعضها إلى بعض بصورة تفوق ما كان عليه المنطق التقليدى بكثير، [1] وسنتحدث فى هذا القسم عن إحدى تجليات هذه السمة، والتى نستفيد بمقتضاها من براهين موجودة لدينا بالفعل فى اختصار براهين أخرى أطول، والقاعدة التى نطبقها لتحقيق هذا الهدف تسمى قاعدة تقديم المتتابعات Sequent Introduction، وهناك حالة خاصة منها نسميها تقديم المبرهنات Theorem Introduction. والأخيرة عبارة عن توظيف مبرهنة فى الإختصار باعتبارها حالة خاصة من حالات المتتابعة. وفى كلا الحالتين يجب النظر إلى القاعدتين باعتبار أن من الممكن الاستغناء عنهما.

والثمن الذى يجب دفعه هنا يتمثل فى زيادة عدد خطوات البرهان بما يكفى للبرهان على المتتابعات أو المبرهنات التى نقرر عدم الاستفادة من البرهان السابق عليها. ولعل هذا يكشف عن أنه لا جديد فى تطبيق هاتين

---

(١) تتمثل سمة التآزر التى نشير إليها هنا فيما يعرف بنظرية الرد فى المنطق القياسى التقليدي، ذلك أن أشكال القياس ترد إلى بعضها بطرق متعددة. لمزيد من التفصيل حول هذه النقطة راجع على سبيل المثال : د. عزمى إسلام (١٩٧٢) - الجزء الأول.

القاعدتين سوى الاختصار فى الخطوات بما يجعلنا نتحاشى تكرار ما سبق لنا القيام به قبلاً.

ويأتـى الآن وقت تناول مثالين فقط على تطبيق القاعدة التى نحن بصددها، والاختصار الذى يتحقق فى خطوات البرهان يعادل تماماً عدد خطوات البرهان الذى نستخدمه فى اشتقاق المتتابعة أو المبرهنة التى نقدمها طبقاً للقاعدة.

مثال (١٠)

$$\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$$

البرهان

	(1)	$P \vee \sim P$	TI
2	(2)	P	Ass
3	(3)	Q	Ass
2	(4)	$Q \rightarrow P$	(3),(2), →I
2	(5)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	(4), vI
6	(6)	$\sim P$	Ass
7	(7)	$\sim Q$	Ass
2,6	(8)	Λ	(2),(6), ~E
2,6	(9)	$\sim\sim Q$	(7),(8), ~I
2,6	(10)	Q	(9), DN
6	(11)	$P \rightarrow Q$	(2),(10), →I
6	(12)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	(11), vI
	(13)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	(1),(2),(5),(6),(12), v E

تقول المبرهنة ببساطة إنه إذا أخذنا صيغتين، يصح بالنسبة لهما أنه إما أن تتضمن الأولى الثانية، أو أن تتضمن الثانية الأولى، على أن تكون هذه العلاقة الفصلية غير مستندة إلى أى مقدمات على الإطلاق. يصح هذا الأمر سواء كانت الصيغتان بسيطتان أو مركبتان. ولهذا تحتاج الخطوة الأولى فى البرهان، ومن ثم إستراتيجيته إلى وقفة تأمل.

إذا فكرنا فى الصيغة الأولى وهى "P" فقط، لرأينا أنها لا تتضمن كل صيغة أخرى إلا إذا كانت هى نفسها صيغة كاذبة، وكذلك لا تتضمنها أى صيغة أخرى إلا إذا كانت هى نفسها صادقة. كذلك يصح الأمر بالنسبة للصيغة الثانية، وهى "Q". وبذا يمكن النظر إلى المبرهنة باعتبارها تقرر أنه بالنسبة لأى من الصيغتين "P"، و "Q" ، إما أن تصدق أو تكون كاذبة.

وعلى ذلك يمكن البداية بإحدى الصيغتين، وهى فى حالتنا هنا الصيغة "P" ، فنضع فى السطر الأول قانون الثالث المرفوع الخاص بها، وهو كما نعلم مبرهنة لا مقدمات لها على الإطلاق ، وبذلك تكون قد طبقنا قاعدة تقديم المبرهنات فى هذا السطر. هذا مع ملاحظة أن البداية بالصيغة "Q" تؤدى نفس الغرض بخطوات متطابقة تقريباً.

بعد ذلك نتحرك فى خطوات البرهان بالصورة المألوفة، وتعتمد إستراتيجيتنا بالطبع على تطبيق قاعدة حذف الفصل فنصل إلى النتيجة نفسها من "P" وحدها مرة، ومن "P~" وحدها مرة مما يعنى أن النتيجة صحيحة بناء على مقدمات "P v ~ P"، كما تقضى بذلك قاعدة حذف الفصل، وبما أن قانون الثالث المرفوع لا توجد له مقدمات فالنتيجة التى تصل إليها لا تحتوى على أى مقدمات، أى أنها مبرهنة منطقية.

وتجدر الإشارة إلى أنه كان من الممكن التوسع فى استخدام قاعدة تقديم المتتابعات، فنلغى مثلاً الخطوات من السابع إلى العاشر بحيث ننتقل من السطر السادس إلى الحادى عشر مرة واحدة، لأننا برهنا فى الفصل الثانى (مثال رقم ١٠) على المتتابعة التى تقول:

$$\sim P \vdash P \rightarrow Q$$

ولدينا فى السطر السادس افتراض هو "P~"، وتقديم المتتابعات يتيح لنا الانتقال مباشرة إلى السطر الحادى عشر كما قلنا.

مثال (١١) :

$$R \rightarrow S \vdash (P \rightarrow S) \vee (R \rightarrow Q)$$

البرهان :

1	(1)	$R \rightarrow S$	As
	(2)	$R \vee \sim R$	TI
3	(3)	R	Ass
1,3	(4)	S	(1),(3), →E
5	(5)	P	Ass
1,3	(6)	$P \rightarrow S$	(5),(4), →I
1,3	(7)	$(P \rightarrow S) \vee (R \rightarrow Q)$	(6), vI
8	(8)	$\sim R$	Ass
3,8	(9)	Λ	(3),(8), ~E
10	(10)	$\sim Q$	Ass
3,8	(11)	$\sim\sim Q$	(10),(12), ~I
3,8	(12)	Q	(11), DN'
8	(13)	$R \rightarrow Q$	(3),(12), →I
8	(14)	$(P \rightarrow S) \vee (R \rightarrow Q)$	(13), vI
1	(15)	$(P \rightarrow S) \vee (R \rightarrow Q)$	(2),(3),(7),(8)(14), vE

تقرر المتتابعة التى بين أيدينا أنه إذا افترضنا صدق تضمن بين طرفين، صدق أن يتضمن المقدم أى قضية أخرى ("Q" مثلاً)، أو أن التالى يتضمنه أى قضية أخرى ("P" مثلاً)، وبعبارة أخرى تقول المتتابعة إنه إذا صدق التضمن كان المقدم كاذباً، أو التالى صادقاً ، أو كلاهما معاً.

ولعل فى هذا ما يجعل من تقديم مبرهنة الثالث المرفوع أمراً ضرورياً لإتمام هذا البرهان، مما يجعل من تطبيق قاعدة حذف الفصل هى الإستراتيجية الأساسية للخطوات. ويلاحظ تشابه هذه الخطوات على البرهان السابق إلى حد كبير. وكذلك يتضح إمكان اختصار بعض خطواتها باستخدام تقديم المتتابعات، فنختصر مثلاً الخطوات من التاسعة حتى الحادية عشرة كما أوضحنا فى المثال السابق.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

أولاً : المراجع الأجنبية

Barry, V. E. & Soccio, D. J. (1988) : Practical Logic, Third Edition, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Beth, E. (1955) : Semantic Entailment and Formal Derivability, reprinted in : Hintikka (1969), PP. 9 - 41.

Bonevac, D. (1987) : Deduction, Introductory Symbolic Logic, Mayfield Publishing Company, U.S.A.

Church, A. (1956) : Introduction to Mathematical Logic, Vol. I, Princeton U. P., Princeton, N. J.

Conway, D. A. & Munson, R. (1990) : The elements of Reasoning, Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, U.S.A.

Dummett, M. (1976) : Is Logic Empirical? Reprinted in Dummett (1978), PP. 269 - 289.

.........................: *(1978) :* Truth and Other Enigmas, Duckworth.

Copi, I. M. (1972) : Introduction to Logic, Fourth Edition, Macmillan Publishers Co., Inc., New York.

Fisher, A. (1988) : The Logic of Real Arguments, Cambridge University Press, Cambridge.

Fitch, F. B. (1952) : Symbolic logic, Ronald Press, New York.

Gabbay, D. & Guenthner, F. (1983) : Handbook of Philosophical Logic, Vol. I : Elements of Classical Logic, D. Reidel Publishing Company.

Geach, P. T. (1976) : Reason and Argument, Basil Blackwell, Oxford.

Gentzen, G. (1934) : Investigations into Logical Deduction, in Szabo, M. E. (1969), PP. 68 - 131.

Goodstein, R. L. (1971) : Development of Mathematical Logic, Logos Press limited, Great Britain.

Haack, S. (1974) : Deviant Logics, Cambridge University Press, Great Britain.

Harrison, F. R. (1992) : Logic and Rational Thought, West Publishing Company, U.S.A.

HasenJaeger, G. (1977) : Introduction to the Basic Concepts and Problems of Modern Logic, D. Riedel P. C., Dordrecht-Holand.

Hintikka, J. (1955) : Form and Content in Quantification Theory, Acta Philosophica Fennica, Vol. 8, PP. 7-55.

.... *(ed.) (1969) :* The Philosophy of Mathematics, Oxford University Press.

Hodges, W. (1977) : Logic, Penguin, Harmondsworth.

.... *(1983) :* Elementary Predicate Logic, In Gabbay, D. & Guenthner, F. (eds.), PP. 1 - 131.

Jeffrey, R. C. (1981) : Formal Logic : Its scope and limits, Second Edition, McGraw-Hill, New York.

Kalish, D.; Montague, R. & Mar, G. (1980 - 1964) : Logic : Techniques of Formal Reasoning, Second edition, Harcort Brace Jovanovich, Inc.

Kneale, W. & Kneale, M. (1961) : The Development of Logic, Oxford U. P.

Lambert, K. & Ulrich, W. (1980) : The Nature of Argument, Macmillan Publishing Co.

Lemmon, E. J. (1965) : Beginning Logic, Nelson, London.

Lukasiewicz, J. & Tarski, A. (1930) : Investigations into the Sentential Calculus, In: Tarski, A. (1983), PP. 38 - 59.

Mates, B. (1965) : Elementary Logic, Second edition, 1972, Oxford University Press, New York.

Newton-Smith, W. H. (1985) : Logic, An Introductory course, Routledge & Kegan Paul Plc.

Nidditch, P. (1962) : Propositional Calculus, The Free Press of Glencoe, New York.

Pospesel, H. (1974) : Propositional Logic, Introduction to Logic, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersy.

Post, E. (1921) : Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, reprinted in Van Heijnoort (1967) : PP. 264 - 283.

Prawitz, D. (1965) : Natural Deduction. Almqvist & Wiksell, Uppsala.

Putnam, H. (1971) : Philosophy of Logic, Reprinted in Putnam (1979).

Putnam, H. (1979) : Mathematics, Matter and Method, Philosophical Papers. Vol. 1, Cambridge University Press.

Quine, W. V. (1940) : Mathematical Logic, Rerised edition, 1951, Harper, U.S.A.

.... *(1950) :* Methods of Logic, Holt, New York.

.... *(1953) :* From a Logical Point of View, Second edition, Harper Row, New York.

.... *(1970) :* Philosophy of Logic, Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. J.

Reichenbach, H. (1947) : Elements of Symbolic Logic, Dover Publications. Inc., New York.

Sainsbury, R. M. (1991) : logical Forms, Basil Blackwell, Great Britain.

Simpson, R. L. (1988) : Essentials of Symbolic Logic, Routledge, London and New York.

Smullyan, R. (1968) : First-Order Logic, Springer, Berlin.

Strawson, P. F. (1952) : Introduction to Logical Theory, Methuen & Co. Ltd., London.

Sundholm, G. (1983) : Systems of Deduction. In: Gabbay, D. & Guenthner, F. (eds.), PP. 133 - 188.

Suppes, P. (1957) : Intioduction to Logic, East-West Press (1978), New Delhi.

Szabo, M. E. (1969) : The Collected Papers of Gerhard Gentzen, North-Holland Publishing Company.

Tarski, A. (1983) : Logic, Semantics, Metamathematics, Trans. by J. Woodger, Second edition, Hackett Publishing Company.

Tennant, N. (1978) : Natural logic, Edinburgh University Press, Edinburgh.

Thomason, R. H. (1970) : Symbolic Logic, An Introduction, Macmillan, London.

Van Dalen, D. (1989) : Logic and Structure, Second Edition, Springer, Berlin.

Va Hijenoort, J. (1967) : From Frege to Godel, Harvard U.P., Cambridge, Mass.

Walton, D. N. (1989) : Informal Logic, A Handbook for Critical Argumentation, Cambridge University Press.

Whitehead, H. and Russell, B. (1910) : Principia Mathematica I, Second Edition, 1925, Cambridge University Press.

ثانياً :المراجع العربية والمترجمة

إسلام ،د. عزمى (١٩٧٠):أسس المنطق الرمزي، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة.

إسلام،د.عزمى(١٩٧٢)،(١٩٧٣):الاستدلال الصورى ، جزءان، مطبوعات جامعة الكويت.

الفندى،د. محمد ثابت(١٩٦٩): فلسفة الرياضة ،دار النهضة العربية ، بيروت.

الفندى،د. محمد ثابت(١٩٧٢):أصول المنطق االرياضى ،دار النهضة العربية ،بيروت.

زيدان ،د. محمود فهمى(١٩٧٩):المنطق الرمزى، نشأته وتطوره ،الطبعة الثالثة،مؤسسة شباب الجامعة

زيدان ،د. محمود فهمى (١٩٨٥): فى فلسفة اللغة،دار النهضة العربية ، بيروت.

فاخورى،د.عادل(١٩٨٨): المنطق الرياضى، الطبعة الثانية، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع .

قاسم ،د. محمد محمد (١٩٩١): نظريات المنطق الرمزى ،دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية .

محمد، د . ماهر عبد القادر (١٩٨٥): فلسفة العلوم (المنطق الرياضى)، دار النهضة العربية ، بيروت.

مرسلى ،محمد (١٩٨٩): دروس فى المنطق الرمزى الإستدلالى ، دار توبقال المملكة المغربية.

مهران.د.محمد(١٩٧٨): مقدمة فى المنطق الرمزى ، دار الثقافة للطباعة والنشر ،القاهرة.

ثالثاً :دراسات غير منشورة

أبوالنور،د.أحمد أنور(١٩٨٣): أهمية فكرة التضمن فى المنطق الرياضى، رسالة ماجستير، كلية الإداب – بجامعة الأسكندرية.